

سب سے ۵، ۱۲، ۱۵

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p * q$
T	T	F	F	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	T	F	F	T	T	T



(۲) " " " " " و ۷ " " فرمول فعلی صرف "

(۴) اگر فرمول ϕ به شکل $\neg \phi_1 \vee \phi_2 \vee \dots \vee \phi_n$ باشد که حرکت از ϕ_i کمیت فرمول عطفی صرف باشد ϕ را فرمولی در صورت متعارف فصلی (DNF) می نامیم.

Disjunctive Normal Form ϕ es, $\exists$ ϕ

(۴) اگر فرمول φ به شکل $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ باشد که هر یک از φ_i یک فرمول اصلی صرف

۴. افریو در صورت متعارف عطفی (CNF) می نایم.

Conjunctive Normal Form

تعریف ۸: کد رشته شاعر ساخته شده از عبارت زمان نطق گزاری را

کبد فرمول خوش ساخت می باشد هرگاه، عضو از محبوب
(well-formed formula)

: Normal Form

$p_i \in \text{FORM}$, $i=1,2,\dots$ ① ✓

العبارة { $P_1, P_2, P_3, \dots$
 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
()

رِسْتَه‌ها مَنَاصِی

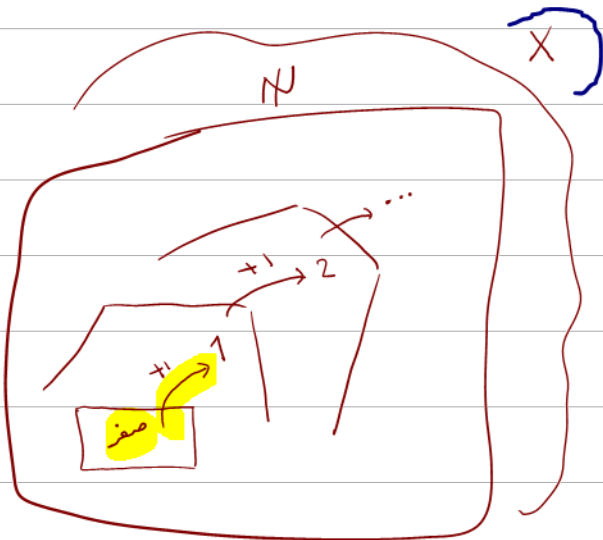
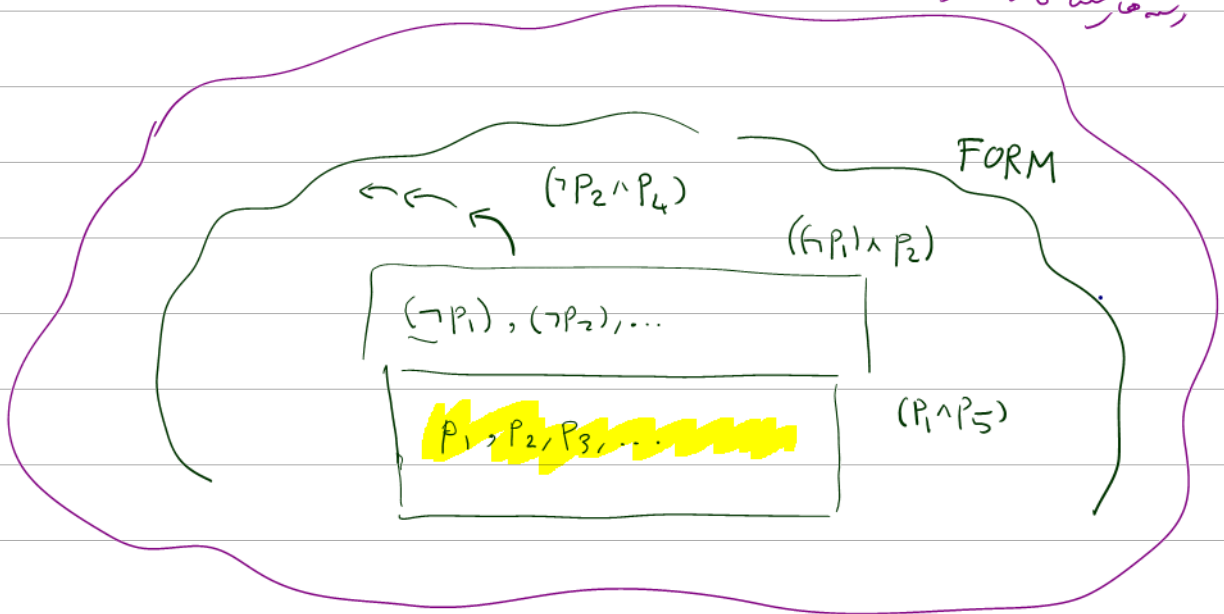
$$\begin{array}{l} \neg(P_1 \rightarrow (P_1 \wedge P_2) \rightarrow P_3) \checkmark \\ \wedge \neg P_1 \leftrightarrow ((\neg P_1) \vee (\neg P_3)) \leftrightarrow P_4 \checkmark \end{array}$$

(۲) اگر $\varphi \in \text{FORM}$ آنگاه $(\neg \varphi) \in \text{FORM}$

(۳) اگر $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{FORM}$ آنگاه $(\varphi_1 * \varphi_2) \in \text{FORM}$ که $*$ یکی از گزاره‌سازها $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ است.

(۴) FORM دارای هیچ عضو دیگر غیر از موارد ذکر شده در بالا نیست.

رشته‌های ساخته شده از اشیاء



اصل استقرای

$\Rightarrow$ کل اعداد طبیعی دارای ویژگی مورد نیاز است.

گزاره: در هر فرمول خوش ساخت، تعداد اشیاء چپ در انتهای هم سازی است.

تعداد اشیاء چپ φ : $\ell(\varphi)$
تعداد اشیاء راست φ : $r(\varphi)$

اثبات: به ازای هر فرمول خوش ساخت مثل φ قرار دهیم

هدف: $r(\varphi) = \ell(\varphi)$

اثبات با استقرای روی سیمبلی فرمول

قدم اول: اگر φ یک گزاره ساده باشد.

$$r(\varphi) = 0 = \ell(\varphi)$$

این کار را می‌توانیم به صورت $\varphi \Rightarrow \varphi$ بنویسیم. در رشته‌های ساده و در واقع این کار دقیقاً همان است.

$$x = y \Rightarrow \varphi$$

قدردان: $\varphi \equiv (\neg \psi)$ که حکم درباره ψ برقرار است.

$$\left. \begin{aligned} r(\varphi) &= r(\neg \psi) = r(\psi) + 1 \\ l(\varphi) &= l(\neg \psi) = l(\psi) + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow r(\varphi) = l(\varphi) \text{ .}$$

مبنای فرض $l(\psi) = r(\psi)$

قدردان: $\varphi \equiv (\varphi_1 * \varphi_2)$ که $*$ $\in \{ \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$

$$\left. \begin{aligned} \text{مبنای فرض: } l(\varphi_1) &= r(\varphi_1) \\ l(\varphi_2) &= r(\varphi_2) \\ l(\varphi) &= l(\varphi_1) + l(\varphi_2) + 1 \\ r(\varphi) &= r(\varphi_1) + r(\varphi_2) + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow l(\varphi) = r(\varphi) \checkmark$$

طبق اصل استقراء (رابطه محوسب FORM مجموعه استقرائات) نتیجه می گیریم که

برای هر $\varphi \in \text{FORM}$ داریم

$$l(\varphi) = r(\varphi)$$



(*) سوال: آیا در ریاضیات مجموعه‌ای داریم که به هم استوار نباشد؟ (خیر)
(Set theory)

$$p \wedge q \vee r \quad (p \wedge q) \vee r$$

قرارداد: ① پراکنده‌ترین فرمول‌ها خوش‌تر از این نویسیم.

$$\neg(\neg p) \quad \neg p$$

② پراکنده‌ترین به نفع این نویسیم.

$$p \leftrightarrow q \vee s \quad p \leftrightarrow (q \vee s)$$

③ نفی از گزاره پیوند $\leftrightarrow$ دوتایی قوی‌تر عمل می‌کند.

$$p \wedge q \rightarrow r \quad (p \wedge q) \rightarrow r$$

④ گزاره پیوند $\rightarrow$ دوتایی به ترتیب زیر قوی‌تر عمل می‌کند:

$$(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3 \quad p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)$$

$$\wedge \rightarrow \vee \rightarrow \rightarrow \leftrightarrow$$

$$(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_3$$

⑤ گزاره پیوندها دوتایی و $\rightarrow$ به از جای قوی‌تر عمل می‌کند.

$$p_1 \wedge \neg p_2 \vee p_3 \rightarrow p_4$$

$$((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \rightarrow p_4$$



تعریف ۱: فرمول ϕ را یک توتولوژی، همواره درست یا همانگونه می‌گویند هرگاه به ازای هر توزیع ارزش در گزاره‌ها (tautology)

اینهاش ارزش درست داشته باشد.

مثال

توتولوژی					آنتی توتولوژی:		
p	$p \vee \neg p$	$p \rightarrow p$	$p \leftrightarrow p$	...	$p \wedge \neg p$	$p \leftrightarrow \neg p$	$p \rightarrow \neg p$
T	T	T	T		F	F	F
F	T	T	T		F	F	F

p	q	$(p \wedge q) \rightarrow q$	$q \rightarrow (p \vee q)$	...	$\neg (p \wedge q \rightarrow q)$
T	T	T	T		F
T	F	F	T		F
F	T	F	T		F
F	F	F	T		F

(۳) فرمول ϕ را یک آنتی توتولوژی یا همواره غلط یا تناقض می‌نامند.

(contradiction) antilogy

هرگاه به ازای هر توزیع ارزش در گزاره‌ها اینهاش ارزش غلط داشته باشد.

تعریف ۲: به ازای هر $\phi \in \text{FORM}$ می‌توان گفت

ϕ یک توتولوژی است $\Leftrightarrow \neg \phi$ یک آنتی توتولوژی باشد.

اثبات: برترین

تعریف ۳: فرض کنید Σ مجموعه‌ای از فرمول‌ها باشد و ϕ یک فرمول باشد.

(logical consequence)

ϕ را یک نتیجه منطقی Σ می‌نامیم در صورتی که $\Sigma \models \phi$

هرگاه به ازای هر توزیع ارزش دهی که همگی فرمول‌های موجود در Σ ارزش درست داشته باشند به ازای آن

ϕ نیز ارزش درست بدهد.

مثال

$$\Sigma = \{p \wedge q, p \rightarrow (q \rightarrow r)\}$$

$$\Sigma \models r$$

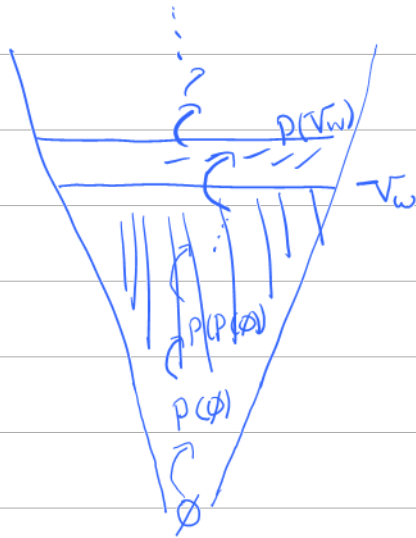
p	q	r	$p \wedge q$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T

r نتیجه منطقی Σ است. ✓

r

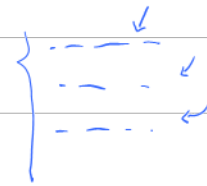
F	T	T	F	T
F	T	$\boxed{F}$	F	T
F	F	T	F	T
F	F	$\boxed{F}$	F	T

IR



V
($n=n$)

مجموعه
 $\in$
=



اصل وجود
 $\exists x (x=n)$
اصل مجموعه توان
اصل اجتماع

$P(P(\dots(P(\emptyset))\dots))$

مجموعه مجرّمه؟
($\emptyset, P, U$) - استوانه