

منطق ریاضی
-
حل ۱۰

$$P'(x_1)?$$

تغییر
سطح $P(c_1, c_2)$

$$M \neq \emptyset$$

$$c_1, c_2, c_3, \dots \in M$$

$$(f^n)^M : M^n \rightarrow M$$

$$(p^n)^M \subseteq M^n$$

تفسیر: در L -فضای دارد M ،

مقران یک ارزش در M را به
نامهای M^* که در همه نرم حاصل زبان
تعریف شده است، توسعه داد.

$$v : \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \rightarrow M$$

$$v^* : \text{TERM} \rightarrow M$$

توضیح: در L -فضای دارد، M یک

یک ارزش در M با این سازش نامهای M است؟
valuation

$$v : \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \rightarrow M$$

$$\begin{array}{c} x_1, x_2, x_3, \dots \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ a_1, a_2, a_3, \dots \end{array}$$

تکرار دهید:

$$\left\{ \begin{array}{l} v^*(x_i) = v(x_i) \\ v^*(c_i) = c_i^M \\ \forall t_1, \dots, t_n, \underbrace{f_i^n(t_1, \dots, t_n)}_{\in \text{TERM}} : v^*(f_i^n(t_1, \dots, t_n)) = (f_i^n)^M(v^*(t_1), \dots, v^*(t_n)) \end{array} \right.$$

تولید، اگر L -فضای دارد.

در ارزش در M v و M را v هم ارزش داریم
اگر در M متغیرها متغیرها را a_i قرار
بماند داشته باشند.

$$\begin{array}{ccccccc} M & & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_i & x_{i+1} & \dots \\ v & & a_1 & a_2 & a_3 & & a_i & a_{i+1} & \\ & & \parallel & \parallel & \parallel & & \parallel & \parallel & \\ \omega & & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_i & b_{i+1} & \dots \end{array}$$

(صدق تاریک)

تولید

صدق (درستی و غلطی) می فرمول رلایند، $\varphi \in \text{FORM}$

دکتر L - ساختار و به از ارزش درستی φ به شکل $(m \models \varphi)$ استوار زیر تعریف می شود:

$$1) \varphi \models P_i^n(t_1, \dots, t_n)$$

$$m \models P_i^n(t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow (v_i^n(t_1), \dots, v_i^n(t_n)) \in (P_i^n)^m$$

$$2) \varphi \models \neg \psi$$

$$m \models \neg \psi \Leftrightarrow m \not\models \psi$$

$$3) \varphi \models \psi_1 \vee \psi_2$$

$$m \models \psi_1 \vee \psi_2 \Leftrightarrow m \models \psi_1 \text{ یا } m \models \psi_2$$

$$4) \varphi \models \forall x_i \psi$$

$$m \models \forall x_i \psi \Leftrightarrow m \models_{\omega} \psi$$

به از ارزش درستی ω که با φ هم ارز باشد.

لذا اگر m یک L -خفا باشد، ω و φ دو زبان ارزش به تفسیر m و t یک ترم درگاه. اگر ω و φ در هر دو متغیرها ظاهر شوند در t قادر بر یکسان سازی باشند آنگاه

$$v_i^*(t) = w_i^*(t).$$

اثبات. گزاره $X = \{x_i\}_{i=1}^m$ چه متغیرها ظاهر شوند در t .

با استفاده از رسم ها.

$$t \models x_i$$

تمایل.

$$\checkmark v_i^*(t) = v_i(t) = w_i(t) = w_i^*(t)$$



$$c_i \text{ آنگاه } + \neq c_i$$

$$v^*(c_i) = v(c_i) = c_i^{\delta n} = w(c_i) = w^*(c_i) \checkmark$$

نمونه ۱۱

نمونه ۱۲

نمونه ۱۳

$$t_1, \dots, t_n \text{ بزرگوار}$$

$$f_i^n(t_1, \dots, t_n)$$

$$v^*(t_1) = v^*(f_i^n(t_1, \dots, t_n)) = (f_i^n)^{\delta n} (v^*(t_1), \dots, v^*(t_n))$$

$$= (f_i^n)^{\delta n} (w^*(t_1), \dots, w^*(t_n))$$

$$= w^*(f_i^n(t_1, \dots, t_n)) = w^*(t) \checkmark$$

فرمول m یک L -صفت باشد، w و v دو ارزش دهنده به m باشد. به ازای هر فرمول φ داریم:

آنگاه به ازای هر $x \in FV(\varphi)$ داشته باشیم

آنگاه

$$m \models_v \varphi \Leftrightarrow m \models_w \varphi$$

اثبات: با استقرا روی پیچیدگی فرمول.

فرمول $\varphi \neq P_i^n(t_1, \dots, t_n)$ ، $t_1, \dots, t_n \in TERM$.

وقت کمینه به ازای هر $x \in FV(\varphi)$ ، این متغیر در حداقل یکی از t_i ها ظاهر می‌شود.

به ازای هر $n, l=1, \dots, n$ ، مجموعه متغیرها ظاهر شده در t_l را با X_l نشان دهیم.

پس از آن به راحتی می‌توانیم بگوییم:

$$FV(\varphi) = \bigcup_{l=1}^n X_l$$

پس به ازای هر $n, l=1, \dots, n$ ، ارزش دهنده w و v متغیرهایی که به متغیرها ظاهر شده در t_l ها اکتفا می‌کنند.

چون هم قس، خواهم داشت:

$$(1) \quad v^*(t_l) = \omega^*(t_l)$$

برای $l=1, \dots, n$

$$M \models_v \varphi \Leftrightarrow M \models P_i^n(t_1, \dots, t_n)$$

توضیح
 $\Leftrightarrow (v^*(t_1), \dots, v^*(t_n)) \in (P_i^n)^M$

(1)
 $\Leftrightarrow (\omega^*(t_1), \dots, \omega^*(t_n)) \in (P_i^n)^M$

توضیح
 $\Leftrightarrow M \models_{\omega} P_i^n(t_1, \dots, t_n) \quad \checkmark$

(... اکتفا به $\varphi \supseteq \neg \varphi$ / نیز)

(2) $\varphi \supseteq \varphi_1 \wedge \varphi_2 \Rightarrow FV(\varphi) = FV(\varphi_1) \cup FV(\varphi_2)$

توضیح
 $M \models_v \varphi_1 \wedge \varphi_2 \Leftrightarrow M \models_v \varphi_1 \text{ و } M \models_v \varphi_2$

فنا شود
 $\Leftrightarrow M \models_{\omega} \varphi_1 \text{ و } M \models_{\omega} \varphi_2$

توضیح
 $\Leftrightarrow M \models_{\omega} \varphi_1 \wedge \varphi_2$

(3) $\varphi \supseteq \forall x_i \varphi$

$\forall x_i \left(\underline{x_i^2 + 2x_i + 3 = 0} \right)$

نتیجه $FV(\varphi) \subseteq FV(\varphi_1)$

حالت اول: $x_i \notin FV(\varphi_1)$

در این حالت $FV(\varphi_1) = FV(\varphi)$

توضیح
 $M \models_v \varphi \Leftrightarrow M \models_{v'} \varphi$
 برابر هم ارزش درست می‌دهد که از هم برابر
 باشد.

بویژه، به ازای هر ω که با ω

از هم ارز است،

خواهر داشت که معادله ω و ω'

در هر مورد، متغیرها را از ω و ω' نجات

از هم ارز استوار

$$m \models_{\omega} \varphi$$

↓

طبق تعریف مدل خواهر

» 2-

$$m \models_{\omega} \varphi$$

$$\begin{array}{c} \boxed{v} \\ v' \end{array} \quad \begin{array}{c} \checkmark \\ a_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \checkmark \\ a_2 \end{array} \quad \dots \quad a_i \quad \dots$$

$$\begin{array}{c} \boxed{\omega'} \\ \omega \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{yellow} \\ b_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{yellow} \\ b_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{b_i} \\ b_i \end{array} \quad \dots$$

هدف ما. به ازای هر ω که از هم ارز با ω است داشته باشیم $m \models_{\omega} \varphi$

$$n_i \in FV(\varphi_i)$$

حالت در

$$m \models_{\omega} \varphi \Rightarrow$$

به ازای هر ω که از هم ارز با ω است

$$m \models_{\omega} \varphi$$

ω و ω' از هم ارز با ω است.

$$\begin{array}{c} v \\ v' \\ \omega' \\ \omega \end{array} \quad \begin{array}{c} a_1 \\ b \\ b_1 \\ b_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} a_2 \\ b \\ b_2 \\ b_2 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} a_i \\ \boxed{a_i} \\ b_i \\ b_i \end{array} \quad \dots$$

می توان به سبب زیر تعریف کرد:

$$v(n_i) := \begin{cases} v(n_j), & j \neq i \\ \omega'(n_i), & j = i \end{cases}$$

برای هر n_i که در ω باشد

که با ω از هم ارز است و علاوه بر n_i مقدار n_i با ω خواهد داشت.

تعریف: ω را می‌گویند از ω' بزرگتر است، $\omega > \omega'$ ، به عبارتی ω' در آن؛ ω
و آن؛ $\omega < \omega'$ که ω بزرگتر از ω' است.

$$m \models_{\omega'} \varphi \Rightarrow m \models_{\omega} \varphi \Rightarrow m \models_{\omega} \forall n, \varphi$$



تذکره: یک نتیجه مهم از گزاره فوق این است که

صدق یک فرمول φ در یک L -ساختار $\mathcal{M}$ وابسته به ارزش ω در $\mathcal{M}$ است.
بنابراین ما می‌توانیم $Fr(\varphi)$ بنویسیم.

توابع ω در L -ساختار $\mathcal{M}$ در آن است (به عبارات) می‌توانیم

$$m \models \varphi$$

هرگاه ω به ازای ω در $\mathcal{M}$ داشته باشیم.

$$m \models_{\omega} \varphi$$

تذکره: اگر φ هیچ متغیر آزاد نداشته باشد، آنگاه به ازای هر L -ساختار
(به عبارت دیگر) دو ارزش ω و ω' خواصی دارند:

$$m \models_{\omega} \varphi \Leftrightarrow m \models_{\omega'} \varphi$$

توابع ω فرمولی که هیچ متغیر آزاد ندارد، یک جمله می‌باشد.

P^2

$$\mathcal{L} = \{P^2, f_1^2, f_2^2, c_1, c_2\}$$

$$\mathcal{M} = \langle \mathbb{R}, \langle \cdot, \cdot \rangle, +, \cdot, 0, 1 \rangle$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $(\mathbb{R}^2, m)$ c_1 c_2

$$\varphi(x) \doteq x+1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{n=-1}$$

$$P_0^2(f_1^2(x, c_2), c_1)$$

$$\psi(n) \doteq x^2 + 3n + 1 = 0$$

$$\theta(n, y) \doteq (x^5 - x^2 y + y^3) = 0$$

$$\sigma \doteq \forall x (x^2 > 0 \vee x^2 = 0)$$

$$\forall x \exists y (xy = 0 \vee xy = 1)$$

$$\exists x (x^2 + 3x + 1 = 0) \Leftrightarrow 9 - 4 > 0$$

$$\exists x (ax^2 + bx + c = 0)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$b^2 - 4ac > 0$$

$$P_1'(n)$$

$$P_1^2(n, y)$$

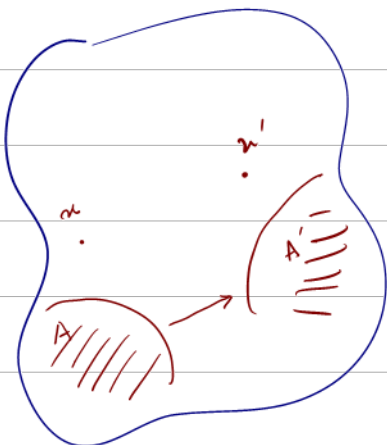
~~~~~

$M$

is a L

$$\exists x (ax^2 + bx + c > 0) \\ a, b, c \in A$$

$$\exists x (a'x^2 + b'x + c' > 0)$$



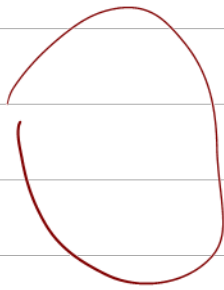
$$f(q) = q$$

$$\textcircled{f} \quad f: M \rightarrow M$$

$$M = \langle \mathbb{C}, +, \cdot, =, ! \rangle$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(n+y) = f(n) + f(y) \\ f(n \cdot y) = f(n) \cdot f(y) \end{array} \right. \quad \Leftarrow$$

$\langle G, * \rangle$



$$\neg (p(n) = 0) \leftrightarrow n \neq n$$