

منطق ریاضی

جلد ۱

توضیح دوباره این گزاره محکم علیه قبل.

اگر ω و ω' در سیغرها از گزاره φ مقادیر یکسانی داشته باشند

$$M \models_{\omega} \varphi \Leftrightarrow M \models_{\omega'} \varphi$$

$$\varphi \equiv \forall x, \psi$$

(*) فرض استوار: به ازاء هر ω و ω' که مقادیر یکسانی در سیغرها

آزاد دارند.

$$M \models_{\omega} \psi \Leftrightarrow M \models_{\omega'} \psi$$

در نتیجه: $\Rightarrow FV(\varphi) = FV(\psi)$

حالت اول $x_i \notin FV(\psi)$: سادتر $\Rightarrow FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x_i\}$

حالت دوم $x_i \in FV(\psi) \Rightarrow \begin{cases} x_i \in FV(\psi) \\ x_i \notin FV(\varphi) \end{cases}$

① $FV(\varphi)$ و ω در مقادیر یکسانی دارند

② $M \models_{\omega} \varphi$

معنی دیگر:

هدف: $M \models_{\omega} \varphi$

متوانیم گزاره قبل را به ازاء هر قبولی φ

صدق φ در یک ساختار داده شده است M به ازاء یک ارزش دهش ω به نر M

تنها به مقدار ω در سیغرها از گزاره φ بستگی دارد.

بنابراین اگر φ دارای هیچ متغیر آزاد نباشد آنگاه به ازاء هر دو ارزش دهش ω و ω' به نر M

خواهیم داشت: $M \models_{\omega} \varphi \Leftrightarrow M \models_{\omega'} \varphi$

تعریف ۱. فرمول مانند φ که دارای هیچ متغیر آزاد نیست را یک جمله می‌نامیم.

sentence

FORM } فرمول‌ها را از سیغرها آزاد

$$(P^2) \quad \mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, \leq, \cdot, +, =, >, < \rangle \quad \mathcal{L} = \{ \underline{P_1^2}, \underline{f_1^2}, \underline{f_2^2}, c_1, c_2 \} \quad \text{و } \mathcal{L}$$

$$(1) \varphi \equiv \exists x (x \cdot x = 1)$$

کونه نزنه $\notin \text{FORM}$

نه مې ارزې دص
دېزه

$$\mathcal{R} \models \varphi$$

$$(2) \psi \equiv \forall x (x > 0 \rightarrow \exists y (x = y \cdot y))$$

$$\theta \equiv \exists x (x \cdot x = x + x + x + 4) \quad \begin{matrix} 1+1+1+1 \\ \text{TERM} \end{matrix}$$

$$\mathcal{R} \models \exists x (x + 4 = 5)$$

$$\begin{matrix} x \mapsto x^2 \\ x \cdot x \end{matrix}$$

$$(2) \mathcal{R} \models \psi$$

$\Downarrow$

بې ارزې ارزې دص مې ارزې بې ارزې و

$$\mathcal{R} \models_{\omega} (n > 0 \rightarrow \exists y (n = y \cdot y)) \quad (*)$$

$$\omega: a_1 \quad a_2 \quad a_3$$

$$\omega: \boxed{a_1} \quad " \quad "$$

$$x \mapsto x_1 \quad \varphi \equiv \exists x (P_1^2 (f_1^2(x, x), c_2)) \in \text{FORM}$$

$\Rightarrow$ ارزې دص وې که ۱-مې ارزې بې ارزې دص وې دص وې دص وې

$$\mathcal{R} \models_{\omega} x \cdot x = 1$$

$$\omega: \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots \end{matrix}$$

$$\omega: \boxed{a_1} \quad " \quad "$$

کافېت قرار دص $\omega(n_1) = 1 \in \mathbb{R}$ برافېت

$$\mathcal{R} \models_{\omega} x \cdot x = 1 \Leftrightarrow (P_1^2)^{\mathcal{R}} (\omega^*(n_1), \omega^*(n_1), \omega^*(c_2)) \in (P_1^2)^{\mathcal{R}} = \{ (n, n) \mid n \in \mathbb{R} \}$$

$$\omega^*(c_2) = c_2 = 1$$

$$\omega^*(n_1) = \omega(n_1) = 1$$

$$\Leftrightarrow (1, 1, 1) \in (P_1^2)^{\mathcal{R}} \Leftrightarrow 1 \cdot 1 = 1 \quad \checkmark$$

$$\mathcal{R} \models_{\omega} \exists y (x = y \cdot y) \quad \text{اگر } \mathcal{R} \models_{\omega} n > 0 \quad \text{اگر } \text{دص مې ارزې بې ارزې دص: } \text{اگر } \text{دص مې ارزې بې ارزې دص: } \text{اگر } \text{دص مې ارزې بې ارزې دص:}$$

$$\omega(n_1) = a_1 \quad \text{دص مې ارزې بې ارزې دص: } a_1 > 0$$

دص مې ارزې بې ارزې دص:

$$\mathcal{R} \models_{\omega} \exists y (x = y \cdot y)$$

$\Downarrow$

$$\omega: a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots$$

دص مې ارزې بې ارزې دص: دص مې ارزې بې ارزې دص: دص مې ارزې بې ارزې دص:

$$\begin{matrix} x \mapsto x_1 \\ y \mapsto x_2 \end{matrix}$$

$$\omega: \boxed{a_1} \quad a_2 \quad " \quad \dots$$

$$\mathcal{R} \models_{\omega'} x = y \cdot y$$

$$\omega': \boxed{a_1} \quad \boxed{a_2} \quad " \quad \dots$$

$$\omega'(x_2) = \sqrt{a_1} \quad \text{کافېت قرار دص}$$

$$(\omega^*(x), f_1^2(\omega^*(x)), \omega^*(y)) \in (P^2)^R = \{(x, y) \mid x \in R\}$$

$$\omega^*(x) = \omega'(x_1) = \omega(x_1) = a_1$$

$$\omega^*(y) = \omega'(x_2) = \omega(x_2) = \sqrt{a_1}$$

$$\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_1} = a_1$$

نکته: محلات رتبه اول و مرتبه دوم را توصیف می کنند
global properties

نمادگذاری: $\varphi \in \text{FORM}$ رابطه یک فرمول رتبه اول را به شکل $\varphi(x_1, \dots, x_n)$

در سیستم منطقی ما این است که متغیرها آزاد و در مجموعه $\{x_1, \dots, x_n\}$ هستند

$$\text{FV}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$\varphi_1(x) \Leftrightarrow x > 0$$

مثال

$$\varphi_2(x, y) \Leftrightarrow \exists z (x \cdot x + y \cdot y = 1)$$

$$x \Leftrightarrow x_1$$

و رتبه

$$y \Leftrightarrow x_2$$

$$\varphi_3(x, y) \Leftrightarrow y = x \cdot x \cdot x + 1$$



$$z \Leftrightarrow x_3$$

$$\varphi_4(x, y) \Leftrightarrow \exists z (x + z \cdot z = y)$$

$$R \models_{\mathcal{A}} \varphi_1(x)$$

$$x : \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ \boxed{a_1} & a_2 & a_3 & \dots \end{matrix}$$

$$\varphi_5(x, y) \Leftrightarrow \exists z (x \cdot x + y \cdot y = z)$$

$$R \models_{\mathcal{A}} x > 0 \quad \varphi_1(m) = \{a \in R \mid a > 0\}$$

$$\varphi_6(x, y, z) \Leftrightarrow x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z = 1$$

کره یک

این فرمول $\varphi_1(m)$ در R توسط هر ارزش درستی که

به x_1 مقدار اولی بزرگتر از 1 بدهد برآورده شود.

$$R \models_{\mathcal{A}} \varphi_2(x_1, x_2)$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 \\ a_1 & a_2 \end{matrix}$$

به ازای هر ارزش درستی که

$$a_1^2 + a_2^2 = 1$$

$$\varphi_2(m) = \{(a_1, a_2) \mid a_1^2 + a_2^2 = 1\}$$



m

$\varphi(x)$



فرمول ها را با استفاده از

بعضی خواص یا ویژگی های

محیط

را توصیف می کنند

تعریف ۱: اگر $\varphi(x) \in \text{FORM}$ دارای متغیر آزاد باشد

در این صورت مجموعه جواب‌ها φ نسبت به M را

را $\varphi(M)$ می‌نامیم.

$$\varphi(M) := \left\{ a \in M \mid \begin{array}{l} \text{کدام عددی است که} \\ \text{مجموعه } M \text{ بر } \varphi \text{ برقرار است} \\ \varphi(x) = a \end{array} \right\}$$

$$M \models_{\varphi} \varphi(x)$$

(۲) اگر $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ دارای n متغیر آزاد باشد

$$\varphi(M) := \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in M^n \mid \begin{array}{l} \text{ارزش‌دهی } \varphi \text{ بر } M \text{ می‌تواند وجود داشته باشد} \\ \varphi(x_i) = a_i \quad (i=1, \dots, n) \end{array} \right\}$$

$$M \models_{\varphi} \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

$\mathcal{L}$

$$\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, <, \dots, +, \cdot, 0, 1 \rangle$$

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, <, \dots, +, \cdot, 0, 1 \rangle$$

$$x \in \mathbb{R}$$

مثال: چه تعداد از مجموعه‌ها $\mathcal{R}$ را می‌توان

با فرمول‌ها رسته اول توصیف کرد؟

فرمولی باشد $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ می‌توانیم که:

$$X = \varphi(\mathcal{R})$$

$$X \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$$

$$|\mathcal{P}(\mathcal{R})| = 2^{|\mathcal{R}|} = 2^{(2^{\aleph_0})}$$

$$\begin{array}{ccc} \aleph_0 & 2^{\aleph_0} & (2^{\aleph_0}) \\ & 2 & 2 \\ & & = \end{array}$$

$$|\mathcal{L}_{\mathcal{R},0}| = \aleph_0$$

$$\varphi \in \text{FORM} \subseteq \left\{ s_1 \dots s_n \mid \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ s_i \in \mathcal{L}_{\mathcal{R},0} \end{array} \right\}$$

$$|\text{FORM}| = \aleph_0$$

$$\left\{ f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{R},0} \mid \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ f \in \mathcal{L}_{\mathcal{R},0} \end{array} \right\}$$

تقریباً: اگر Y^* مجموعه دنباله‌های متناهی از عناصر Y

باشد (Y مجموعه اعداد رتبه‌دار)

اگر $|Y| > \aleph_0$ باشد

$$|Y^*| = |Y|$$



$$\left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ تابع } \right\}$$

تعداد بسیار زیادی مجموعه، تابع، رابطه ... در اعداد حقیقی وجود دارد که توسط هیچ فرمول رسته اول قابل توصیف (تعریف نباشد)

تعریف یک ساختار داده M را در نظر بگیرید.

① $X \subseteq M$ را مجموعه تعریف پذیر (definable) می نامیم هرگاه فرمول رتبه اول در زبان M به گونه ای که

$$\varphi(m) = X$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ فرمول رتبه اول} \sim \dots \sim X \subseteq M^n \quad (2)$$

$$\varphi(m) = X \subseteq M^n$$

$\mathcal{L}$: $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{C}, \dots$

صیغه

$$\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, <, \cdot, +, \sqrt{}, 0, 1 \rangle$$

$$\text{TERM} \ni t(x) \approx \underbrace{5x^3 + 3x^2 - x + 1}$$

$$t_1(x) < t_2(x), t_1(x) = t_2(x), t_1(x) + t_2(x)$$

$$X_1 = \{ (x, \sin(x)) \in \mathbb{R}^2 \} \subseteq \mathbb{R}^2$$

آیا X_1 در $\mathcal{R}$ تعریف پذیر است؟

$$\varphi(x_1) \in \mathcal{L} \quad \varphi(\mathbb{R}^2) = X$$

$$\begin{aligned} 2 &\approx 1+1 \\ 3 &\approx 1+1+1 \\ &\vdots \\ n &\approx \underbrace{1+\dots+1}_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot x &\approx x^2 \\ x \cdot x \cdot x &\approx x^3 \\ x \cdot x \cdot x \cdot x &\approx x^4 \end{aligned}$$

رشته اول

$\sin(x)$ در $\mathcal{R}$ تعریف پذیر است؟ خیر

$\cos(x)$ ؟ خیر

e^x ؟ خیر

$\ln(x)$ ؟ خیر

$\sin(\ln(x))$ ؟ خیر

$\sin(\ln(x))$

$$\frac{1}{x} \xrightarrow{\text{کاهش توان}} \ln(x) \xrightarrow{\text{توان}} e^x$$

$$\mathcal{L} = \{ \frac{1}{x}, \ln(x), e^x \} \cup \{ +, -, \cdot, \div \}$$

✓
süß
Ghm