

منطق ریاضی
 مبحث ۱۲

مفهوم صدق

$$M \models \varphi$$

M ساختار

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \text{FORM}$$

ω, v در هر مدل متغیرها آزاد φ متغیرها اعتبار می‌کنند

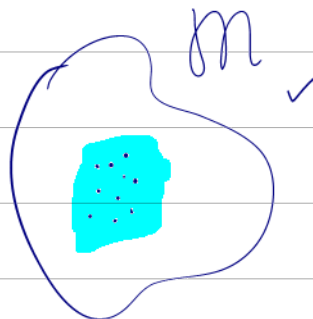
$$M \models_v \varphi \Leftrightarrow M \models_\omega \varphi$$

$$M \models_v \exists x P(x) \Leftrightarrow$$

عنصری باشد
 که وجود دارد که

$$\Downarrow M \models_\omega \exists x P(x)$$

عضو p^M



$$\text{FV}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\} \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ که}$$

متغیرها را فرمول φ را فرمول به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_{x_1} H_{x_2} \dots H_{x_n} \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

تعریف (صدق در یک ساختار)

صدق: تعریف از صدق ارائه می‌دهیم که تنها

یک ساختار M

را داشته باشد و مستقل از

ارزشی در معین باشد.

به از هر فرمول داریم φ ، ساختار داریم

M ، فرمول φ را در M صادق می‌نامیم یا می‌گوییم

φ در M درست است یا $M \models \varphi$

یا $M \models \varphi$ را می‌گویند

اگر گزاره در هر دو دهنه درست باشد $m \models \phi$ داشته باشیم

$$m \models \phi$$

تذکره. اگر ϕ در هیچ سطر گزاره نباشد، تعریف فوق عملاً چیز بیش از حد (محدود) است. تعریفی که میسر به ساختار گزاره مربوط، نخواهد بود.

در صورتی که ϕ میفرآید گزاره داشته باشد، تعریف فوق عملاً به معنای برقرار ساختن ϕ در m است. (که خاصیت

همانند گزاره است)

تعریف ۱. فرمول ϕ را منطقاً معتبر می‌نامیم هرگاه در هر ساختار رابطه اول

logically valid

درست باشد: به عبارتی $\models_{F.O.} \phi$ - ساختار است $m \models \phi$ داشته باشیم

$$m \models \phi$$

این مفهوم را با این نماد $\models \phi$ نمایش می‌دهیم.

۱۰۲

$$\phi \models \forall x (P(x) \rightarrow P(x))$$

P : محمول یک سوختی

تذکره. به ازای هر توکلوتور از منطق گزاره‌ها، اگر نموده از آن توکلوتور در منطق رابطه اول را در نظر بگیریم

فرمول حاصل منطقاً معتبر خواهد بود.

$$\models p \rightarrow (q \rightarrow p)$$

منطق گزاره‌ها

محمول در سوختی

$$\alpha \models \forall x \exists y R(x, y)$$

$$\beta \models \exists x P(x)$$

محمول سوختی

$$\models \forall x \exists y R(x, y) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \forall x \exists y R(x, y))$$

منطقاً معتبر

$$\models \forall x P(x) \rightarrow P(c)$$

محمول سوختی

۱۰۳

$$M \models \forall n P(n) \rightarrow P(c)$$

$$(p \rightarrow q)$$

$$. (2)$$

$$M \models \forall n P(n) \stackrel{?}{\Rightarrow} M \models P(c)$$

بازار هزار و صد و بیست و یک
باشه

$$M \models \forall n P(n)$$

از طرفی، c ، M ، $a \in M$ به صورتی که

$$c = a \in M$$

کافی است از طرفی دیگر در نظر بگیریم

$$\omega(x_1) = a$$

طبق (*) خرابی داریم:

$$a = \omega^*(x_1) = \omega(x_1) \in P^M$$

$$\stackrel{a=c}{\Rightarrow} M \models P(c)$$

$$M \models P(n)$$

$$\omega^*(x) \in P \quad (*)$$

$$\not\models \forall n \forall y (\varphi(n, y) \rightarrow \varphi(y, n))$$

مثلاً

f در متغیره

$$\langle \mathbb{R}, + \rangle \models \varphi$$

$$\langle \mathbb{N}, + \rangle \not\models \varphi$$

$$N := \langle \mathbb{N}, h \rangle \quad f^M = h$$

$$h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(n, y) \mapsto x^y$$

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M = \langle M, x \rangle$$

ضرب ماتریس ها

$$M \not\models \varphi$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ضرب ماتریس‌ها جایگزین نیست}$$

مقایسه ساختارها

elementarily equivalent	$M \equiv N$	$\left. \begin{array}{l} \text{هم‌ارز ساده} \\ \text{هم‌ارز رفت و برگشت} \\ \text{یک‌ساختی} \end{array} \right\}$
back & forth equivalence	$M \equiv_{\text{b.f.}} N$	
isomorph	$M \cong N$	

تذکره: ما در این درس مقایسه ساختارها تنها از نظر یک زبان معین را بررسی می‌کنیم.
یعنی خود ساختار که هر مقایسه بر آن ترسیم را در یک زبان مشترک L در نظر می‌گیریم.

$$L = \{ = \}$$

$$L = \{ =, \epsilon \}$$

تعریف ۱: در L -ساختار M و N را در نظر بگیرید.

$$\Psi: M \rightarrow N \quad \text{تابع}$$

رایک هم‌ارزی homomorphism گوئیم (L -هم‌ارزی)

homomorphism

isomorphism

فراشه: ① به ازاء هر نماد c از L مثل c :

$$\Psi(c^M) = c^N$$

② به ازاء هر نماد تابع n -تایی مثل $f \in L$:

به ازاء هر $a_1, \dots, a_n \in M$ داشته باشیم:

$$\Psi(f^M(a_1, \dots, a_n)) = f^N(\Psi(a_1), \dots, \Psi(a_n))$$

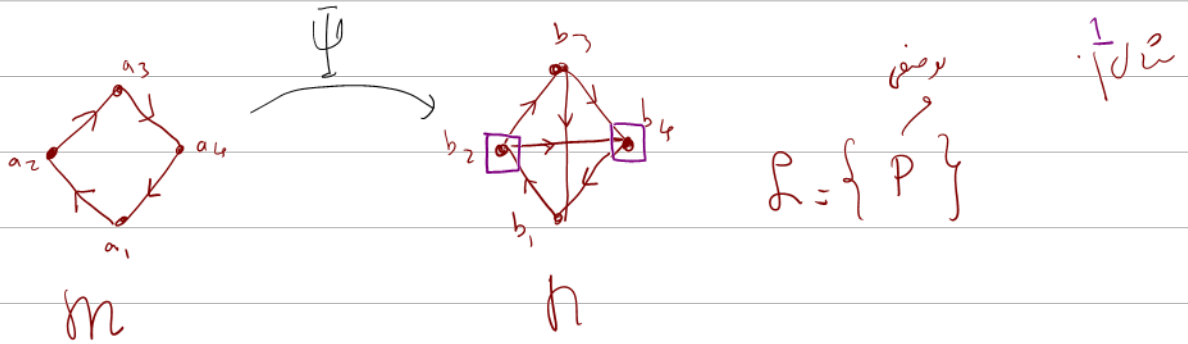
③ به ازاء هر نماد ثمری n -تایی مثل $P \in L$:

morph

یونانی
↓
form
شکل
لابتی

$$a_1, \dots, a_n \in M$$

$$(a_1, \dots, a_n) \in P^M \Rightarrow (\Psi(a_1), \dots, \Psi(a_n)) \in P^N$$



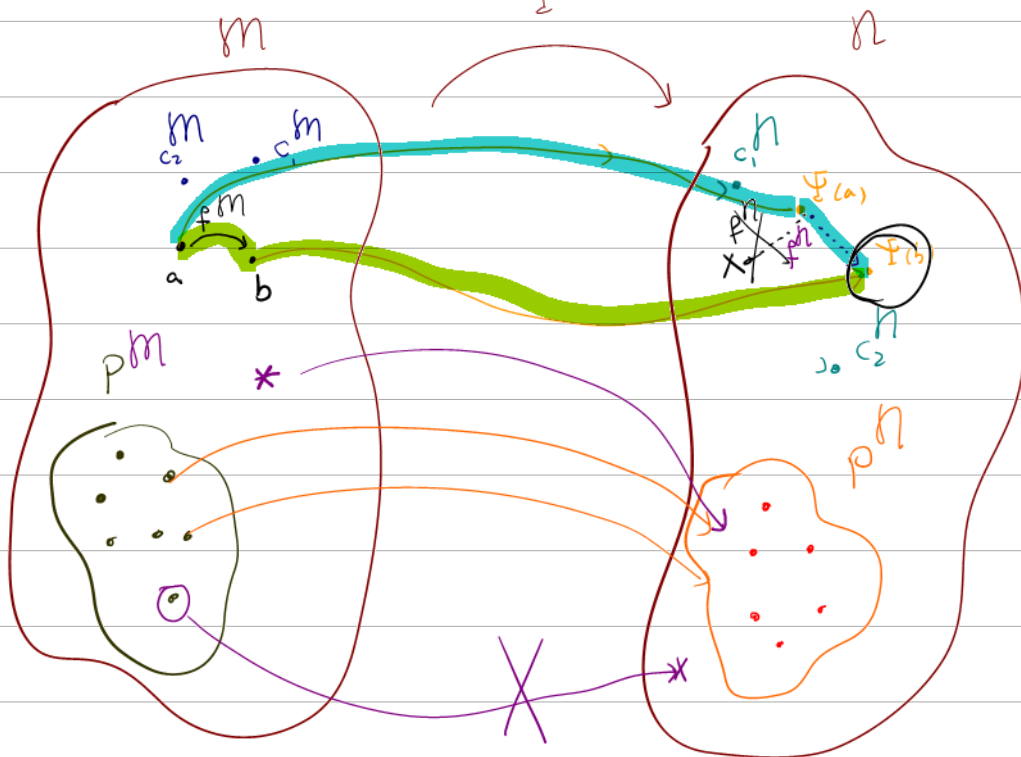
$$M = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

$$P^M = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_1)\}$$

$$(\Psi(a_1), \Psi(a_2)), (\Psi(a_2), \Psi(a_3)), (\Psi(a_3), \Psi(a_4)), (\Psi(a_4), \Psi(a_1))) \in P^N$$

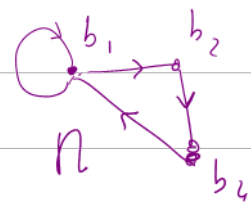
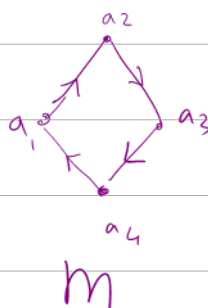
$$\Psi: M \rightarrow N$$

$$\begin{cases} a_1 \mapsto b_1 \\ a_2 \mapsto b_2 \\ a_3 \mapsto b_3 \\ a_4 \mapsto b_4 \end{cases}$$



$$\Psi_2: M \rightarrow N$$

$$a_1 \mapsto b_1$$



m و n دو مجموعه
 ① تعریف
 $\Psi: M \rightarrow N$ را یک L -embedding می‌نامیم هرگاه

یک هم‌نوعی یک به یک باشد.

در این صورت می‌گوییم m از طریق Ψ در n نشانه شده است.

m is embedded in n .

② $\Psi: M \rightarrow N$ را یک L -isomorphism می‌نامیم هرگاه یک هم‌نوعی یک به یک و پوشش باشد.

$$m \cong_L n$$

در این صورت m و n را یک‌نوعی می‌نامیم در زیرهم

③ به ازای هر $a_1, \dots, a_n \in M$ و هر $\varphi \in L$ (فعل n -برهه‌ای)

$$(a_1, \dots, a_n) \in \varphi^M \Leftrightarrow (\Psi(a_1), \dots, \Psi(a_n)) \in \varphi^N$$

$$L = \{ \varphi \}$$

یک هم‌نوعی از یک L -فضای m به یک L -فضای n
 عمل‌ها یک به یک تابع یک به یک و پوشش است.

$$\Psi: M \xrightarrow{1-1} N$$

$$a \neq b \Leftrightarrow \Psi(a) \neq \Psi(b)$$

$$(a_1, a_3) \notin \varphi^M$$

مثال ۱: یک هم‌نوعی یک به یک زیرا

$$\Psi(a_1), \Psi(a_3) = (b_1, b_3) \in \varphi^N$$

مثال ۲: یک هم‌نوعی یک به یک زیرا