

منطق ریاضی (آموزش مجازی)

علی ولی زاده

دانشگاه اصفهان

فروردین ۱۳۹۹

فهرست مطالب

۳	۱. منطق مرتبه اول
۳	۱-۱ نیاز به منطقی جدید
۱۰	۲-۱ تعبیر و ساختار
۱۷	۳-۱ صدق و تعریف پذیری
۳۳	۴-۱ ویژگی های صدق
۴۲	۵-۱ تمایز بین دو ساختار، هم ارزی مقدماتی
۴۸	۶-۱ دستگاه استنتاج برای منطق مرتبه اول

منطق مرتبه اول

۱-۱ نیاز به منطقی جدید

مثال ۱-۱-۱. اگر رسول کوچکتر از علی است و علی کوچکتر از مسعود است، آنگاه رسول کوچکتر از مسعود است.

اگر بخواهیم استدلال بکار گرفته شده در این مثال را با استفاده از منطق گزاره‌ها صورت‌بندی کنیم به چنین فرمولی خواهیم رسید:

$$p \wedge q \rightarrow r,$$

که در آن فرمول اتمی p را برای «رسول کوچکتر از علی است»، فرمول اتمی q را برای «علی کوچکتر از مسعود است» و r را برای «رسول کوچکتر از مسعود است» در نظر گرفته‌ایم. این عملاً بهترین کاری است که درباره این استدلال از منطق گزاره‌ها بر می‌آید. از طرفی، این نکته را به یاد آورید که فرمول‌های اتمی کاملاً مجزا از یکدیگرند و صدق و کذبشان کاملاً از هم مستقل است. یعنی از دیدگاه منطق گزاره‌ها، هیچ ارتباطی بین آنچه در درون p می‌گذرد و آنچه در درون q می‌گذرد وجود ندارد.

اما، ما می‌بینیم که در استدلال فوق، واقعاً ارتباطی بین مفروضات و نتیجه وجود دارد که به ساختار درونی آنها بر می‌گردد چرا که همگی درباره «کوچکتر بودن» صحبت می‌کنند. اما منطق گزاره‌ها امکان تحلیل ساختار درونی آنها را به ما نمی‌دهد.

از طرفی، مسئله به این بر می‌گردد که خاصیت «کوچکتر بودن» را می‌توان درباره هر زوجی از افراد به‌کار برد؛ یعنی مثلاً می‌توانیم بگوییم « x کوچکتر از y است». پس اگر منطقی که به دنبالش هستیم به ما اجازه بدهد که برای عناصر مجموعه‌ای که استدلال ما درباره آنهاست (در مثال فوق مجموعه «انسان‌ها»)، از «متغیر»هایی استفاده کنیم و از طرف دیگر این اجازه را بدهد که نمادی

مثلاً به شکل $J(x, y)$ داشته باشیم، آنگاه می‌توانیم استدلال فوق را به این شکل صورت‌بندی کنیم:

$$J(Rasoul, Ali) \wedge J(Ali, Massoud) \rightarrow J(Rasoul, Massoud). \quad (1-1-1)$$

اگر با دقت بیشتری به معادله (۱-۱-۱) نگاه کنیم، می‌بینیم که ما عملاً انتظار بیشتری از منطق مورد نظرمان داریم و آن اینکه، بتوانیم موجوداتی به شکل $J(x, y)$ را علاوه بر متغیرها درباره «چیزهایی» مثل «رسول»، «علی» و «مسعود» هم بکار ببریم. یعنی می‌خواهیم در زبانمان نمادهایی داشته باشیم که بتوانیم از آنها برای نمایش چیزهایی مثل «رسول» یا «علی» استفاده کنیم؛ ما به آنها «نماد ثوابت» خواهیم گفت. تفاوتی که این نمادها با نمادهای متغیری دارند این است که وقتی آنها را «تعبیر» کردیم تا پایان ثابت می‌مانند! وقتی مفاهیم لازم را به دقت تعریف کردیم، به مثال ۱-۱-۱ باز خواهیم گشت و این توضیحات را دقیق‌تر خواهیم دید.

حال به استدلال بکار گرفته شده در این شعر زیبا از مولانا دقت کنید:

مثال ۱-۱-۲.

آینه‌ات دانی چرا غماز نیست زانک زنگار از رُخش ممتاز نیست
آینه کز زنگ آرایش جداست پر شعاع نور خورشید خداست^۱

شبهه به مثال ۱-۱-۱، اگر بخواهیم از منطق گزاره‌ها برای صورت‌بندی استدلال مولانا استفاده کنیم، می‌توانیم فرمول‌هایی اتمی به شکل زیر در نظر بگیریم^۲:

$$\begin{array}{ll} \text{آینه پر نور است: } q & \text{آینه پاک است: } p \\ \text{آینه تو پر نور است: } s & \text{آینه تو پاک است: } r \end{array}$$

همان‌طور که می‌بینیم در منطق گزاره‌ها ما چاره‌ای جز این نداریم که برای «آینه پاک است» و «آینه تو پاک است» دو فرمول اتمی مجزا در نظر بگیریم که با این کار مجدداً ارتباط درونی این دو جمله را نادیده گرفته‌ایم. پس استدلال فوق در منطق گزاره‌ها، صورتی این چنینی خواهد داشت:

$$\{p \rightarrow q, \neg s\} \vdash \neg r.$$

که با استفاده از قضیه استنتاج به این شکل می‌شود:

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg s \rightarrow \neg r.$$

که اساساً نمی‌تواند یک توتولوژی باشد. اما با استفاده از امکانی که منطق مرتبه اول در اختیار ما قرار می‌دهد می‌توانیم نمادی مانند $P(x)$ برای «آینه x پر نور است» و نمادی مانند $T(x)$ برای «آینه

از «غماز» بودن همان «پر نور» بودن است.
^۱ مثنوی معنوی، دفتر اول
^۲ همان‌طور که مشخص است در این شعر منظور

x پاک است» در نظر بگیریم. همچنین، می‌توانیم نمادی ثابت برای «تو» مانند t در نظر بگیریم. اگر با دقت بیشتری به استدلال موجود در مصرع دوم این مثال نگاه کنیم، به این شکل است:

«هر کسی که آینه‌اش پاک است، آینه‌اش پر نور است»

اما، این استدلال از استدلال بکار گرفته شده در مثال ۱-۱-۱ چیزی بیشتر دارد که به معنای عبارت «هر کسی» برمی‌گردد. از آنجا که ما در منطق مرتبه اول اجازه استفاده از متغیرها را داده‌ایم، طبیعی است که بتوانیم عباراتی مانند «برای هر x » را نیز در این منطق داشته باشیم. بنابراین، علاوه بر نمادهای منطقی $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ نمادی مانند $\forall$ برای این منظور در نظر خواهیم گرفت. در نتیجه، عبارت فوق صورت زیر را خواهد گرفت:

$$\forall x(T(x) \rightarrow P(x)). \quad (2-1-1)$$

از طرفی طبیعی است که فکر کنیم اگر عبارتی برای همه x ‌ها برقرار باشد، برای یک چیز خاص مانند t نیز برقرار باشد. یعنی طبیعی است که از معادله (۲-۱-۱) بتوانیم عبارت زیر را نتیجه بگیریم:

$$T(t) \rightarrow P(t). \quad (3-1-1)$$

این در واقع، اصل جدیدی است که به منطقمان اضافه خواهیم کرد و آنرا «قاعده تخصیص» خواهیم خواند. پس نهایتاً، ما موفق به صورت‌بندی استدلال مولانا به شکل زیر خواهیم شد:

۱. $\forall x(T(x) \rightarrow P(x))$	مفروضات
۲. $T(t) \rightarrow P(t)$	قاعده تخصیص
۳. $\neg P(t)$	مفروضات
۴. $\neg P(t) \rightarrow \neg T(t)$	۲ و عکس و نقیض
۵. $\neg T(t)$	MP ، ۳، ۴.

که این شکل نهایی را خواهد یافت:

$$\{\forall x(T(x) \rightarrow P(x)), \neg P(t)\} \vdash \neg T(t).$$

تعریف ۱-۱-۳. زبان منطق مرتبه اول^۱ که آن را با $\mathcal{L}_{fo}$ نشان می‌دهیم از بخش‌های زیر تشکیل شده است:

(۱) مجموعه رابط‌های منطقی^۲ $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ، سور عمومی^۳ $\forall$ ، سور وجودی^۴ $\exists$ ، و پرانتزهای راست و چپ. این بخش از زبان را بخش منطقی زبان می‌نامیم.

^۱the language of first-order logic

^۴existential quantifier

^۲logical connectives

^۳universal quantifier

(۲) بی نهایت شمارش پذیر از متغیرها^۵: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

(۳) بی نهایت شمارش پذیر از نمادها برای ثوابت^۱: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

(۴) بی نهایت شمارش پذیر از نمادهای محمولی^۲:

$$\{\{A_k^n\}_{n \in \omega}\}_{k \in \omega} = A_1^1, A_2^1, \dots, A_1^2, A_2^2, \dots$$

(۵) بی نهایت شمارش پذیر از نمادهای تابعی^۳:

$$\{\{f_k^n\}_{n \in \omega}\}_{k \in \omega} = f_1^1, f_2^1, \dots, f_1^2, f_2^2, \dots$$

دقت کنید که در نمادهای محمولی و تابعی، بالانویس‌ها چند موضعی بودن آن نماد را مشخص می‌کنند. مثلاً f_2^2 پنجمین نماد تابعی^۲ موضعی است.

شبیه به منطق گزاره‌ها ما مجموعه فرمول‌های خوش ساخت را به شکل استقرائی تعریف می‌کنیم. اما در منطق مرتبه اول ما علاوه بر فرمول‌های خوش ساخت، مجموعه استقرائی دیگری داریم که به آن مجموعه ترم‌ها می‌گوییم. اعضای این مجموعه بر خلاف فرمول‌ها قابل اِتِّصاف به صدق و کذب نیستند. درک ملموس‌تری از ماهیت ترم‌ها در طی مثال‌ها بدست خواهد آمد.

تعریف ۱-۱-۴. مجموعه ترم‌های^۴ زبان که با TERM نمایش داده می‌شود، کوچکترین مجموعه‌ای است که به نحوی استقرائی به شکل زیر تعریف می‌شود:

(۱) همه متغیرها و نمادهای ثوابت متعلق به TERM هستند.

(۲) در صورتی که $t_1, \dots, t_n$ عضو TERM و f_k^n نماد تابعی^۱ n متغیره‌ای از زبان باشد، آنگاه $f_k^n(t_1, \dots, t_n)$ نیز متعلق به TERM است.

تعریف ۱-۱-۵. مجموعه فرمول‌های خوش ساخت^۵ زبان که با FORM نمایش داده می‌شود، کوچکترین مجموعه‌ای است که به نحوی استقرائی به شکل زیر تعریف می‌شود:

(۱) اگر $t_1, \dots, t_n \in \text{TERM}$ و نماد A_k^n محمولی^۲ n موضعی از زبان باشد، آنگاه $A_k^n(t_1, \dots, t_n)$ فرمولی خوش ساخت است. چنین فرمول‌هایی را فرمول‌های اتمی^۶ می‌نامیم.

(۲) در صورتی که A یک فرمول باشد و x_i متغیری از زبان، آنگاه $(\forall x_i)A$ ، $(\neg A)$ و $(\exists x_i)A$ نیز یک فرمول هستند.

^۵variables

^۱constant symbols

^۲predicate symbols

^۳function symbols

^۴term

^۵well-formed formulas

^۶atomic formulas

(۳) در صورتی که $A_1, A_2 \in \text{FORM}$ و $*$ یکی از رابط‌های منطقی $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ باشد، آنگاه $(A_1 * A_2)$ نیز یک فرمول است.

تعریف ۱-۱-۶. در فرمولی مانند $((\forall x_i)A)$ ، فرمول A را دامنه^۱ سور $\forall x_i$ نامیده می‌شود. دقت کنید که A می‌تواند شامل x_i نباشد؛ در چنین حالاتی، آنچه که از $((\forall x_i)A)$ در ذهنمان داریم همان A است.

قرارداد ۱-۱-۷.

(۱) همه قواعد مربوط به حذف پرانتزها که در منطق گزاره‌ها بیان شدند در منطق مرتبه اول نیز صادقند و ما آنها را آزادانه بکار خواهیم گرفت.

(۲) سورها قوی‌تر از همه رابط‌های دیگر منطقی عمل می‌کنند. مثلاً $\forall x_1 A_1^1(x_1) \wedge A_1^2(a_1, x_2)$ به معنای $((\forall x_1)A_1^1(x_1)) \wedge A_1^2(a_1, x_2)$ خواهد بود. این قرارداد از آنچه در کتاب مندلسون آمده بهتر است. کتاب، سورها را بین $\{\wedge, \vee\}$ و $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$ قرار داده است.

(۳) زمانی که چند سور از یک جنس پشت سر هم آمده باشند، ما تنها یک سور را می‌نویسیم و بقیه متغیرها را پشت سر هم قرار می‌دهیم. مثلاً، فرمولی به شکل زیر:

$$((\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5)(\forall x_6)(\forall x_7)(\forall x_8)A)$$

را به این شکل می‌نویسیم:

$$\forall x_1 x_2 \exists x_3 x_4 x_5 \forall x_6 x_7 x_8 A.$$

مثال ۱-۱-۸.

(۱) مثال‌هایی از ترم‌های زبان:

$$x_{54}, a_7, f_5^1(x_{54}), f_2^2(a_7, a_7), f_6^3(a_1, f_5^1(x_{54}), f_2^2(a_7, a_7)), \dots$$

(۲) مثال‌هایی از فرمول‌های اتمی:

$$A_7^1(x_3), A_7^2(x_3, a_2), A_1^3(f_2^2(a_2, x_3), f_5^1(x_{54}), a_4), \dots$$

^۱scope

(۳) مثال‌هایی از فرمول‌های دیگر زبان:

$$\begin{aligned} (۱-۳) \quad & A_1^1(x_3) \vee \neg A_1^2(x_4, a_2), \\ (۲-۳) \quad & \neg A_1^1(x_1) \rightarrow \forall x_1 A_1^2(x_2, a_1), \\ (۳-۳) \quad & \forall x_3 A_1^1(x_3) \rightarrow \exists x_{\delta 4} A_1^2(f_1^2(a_2, x_3), f_{\delta}^1(x_{\delta 4})), \\ (۴-۳) \quad & \forall x_1 x_2 \exists x_3 x_4 (A_1^2(x_1, x_3) \wedge A_1^2(x_3, x_2) \wedge A_1^2(x_1, x_4)), \\ & \dots \end{aligned}$$

قرارداد ۱-۱-۹.

(۱) برای ساده‌تر شدن نوشته‌هایمان، هر جا امکان ابهامی نباشد، برای متغیرها از نمادهایی مانند زیر استفاده می‌کنیم:

$$x, y, z, w, x', y', z', w', y_1, z_1, w_1, y_2, z_2, w_2 \dots$$

آنچه در ذهن داریم این است که هر یک از این نمادها در اصل به شکل x_j ای هستند.

(۲) همچنین، مجدداً در جایی که امکان ابهامی وجود ندارد، برای محمول‌ها از نمادهایی مانند زیر استفاده می‌کنیم:

$$A(x, y), R(x, y, z), P(x), J(x, y), R_2(y, z), T_2(z), \dots$$

همانطور که مشخص است، اینکه محمولی مانند $R(x, y, z)$ چند موضعی است، از تعداد متغیرهایش معلوم می‌شود اما اگر جایی احتیاج داشتیم که چند موضعی بودن یک محمول را صراحتاً مشخص کنیم، بالانویسی مناسب برای آن در نظر می‌گیریم؛ مثلاً می‌نویسیم J^2 یا $J^2(x, y)$.

(۳) قاعده فوق را درباره توابع نیز به کار می‌گیریم و هر جا ابهامی نبود از نمادهایی مثل زیر برای نشان دادن توابع بهره می‌گیریم:

$$f(x), g(x, y), h(x, y, z), f_1(x, y), g_2(x), \dots$$

همان‌طور که از مثال‌های بالا مشخص است، ممکن است یک فرمول شامل تعدادی متغیر باشد که این متغیرها در دامنه یک سور قرار بگیرند یا نه. مثلاً به فرمول‌هایی که در قسمت (۳) از مثال ۱-۱-۸ آوردیم دقت کنید. متغیر $x_{\delta 4}$ در فرمول (۳-۳) هم در سور وجودی و هم در دامنه آن قرار گرفته است. و یا x_3 در فرمول (۱-۳) در دامنه هیچ سوری نیست. بنا به دلایلی که به مرور مشخص خواهد شد ما مایلیم بین این متغیرها تمایز قائل شویم:

تعریف ۱-۱-۱۰.

(۱) وقوع یک متغیر مانند x در یک فرمول را وقوعی بسته^۱ می‌نامیم اگر این متغیر در سوری عمومی مثل $\forall x$ یا وجودی مثل $\exists x$ و یا در دامنه چنین سوری واقع شده باشد. در غیر این صورت، آن وقوع را آزاد^۲ می‌نامیم.

(۲) متغیر x را در فرمولی مانند A آزاد (بسته) می‌نامیم هرگاه x وقوعی آزاد (بسته) در آن فرمول داشته باشد.

بنابراین، ممکن است یک متغیر در یک فرمول هم آزاد باشد و هم بسته. مثلاً در مثال ۱-۱-۸، متغیرهای x_2 و x_4 در فرمول (۱-۳) آزاد هستند. یا متغیر x_1 در فرمول (۲-۳) دارای یک وقوع آزاد و یک وقوع بسته است، حال آنکه متغیر x_2 در این فرمول تنها وقوعی آزاد دارد؛ دقت کنید که x_2 در دامنه سوری به شکل $\forall x_1$ قرار دارد اما چون آن سور درباره x_2 نیست وقوعش آزاد است. و یا در فرمول (۳-۳)، متغیر x_3 دارای سه وقوع است که دو تای اولی بسته و آخری آزاد است. پس x_3 در این فرمول هم آزاد است و هم بسته.

قرارداد ۱-۱-۱۱. وقتی که می‌خواهیم نشان دهیم که بعضی از متغیرهای $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ در فرمولی مانند A حضوری آزاد دارند، این فرمول را به شکل $A(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ می‌نویسیم. دقت کنید که اولاً، وقتی می‌نویسیم $A(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ به این معنی نیست که حتماً هر یک از متغیرهای $\{x_{i_j}\}_{j=1}^n$ در A به عنوان متغیری آزاد ظاهر شده‌اند. و ثانیاً، ممکن است متغیرهای آزاد دیگری غیر از $\{x_{i_j}\}_{j=1}^n$ هم در A باشند.

قرارداد بالا ممکن است عجیب یا اضافی به نظر برسد اما به زودی خواهیم دید که به کارمان خواهد آمد.

تعریف ۱-۱-۱۲. هر ترمی را که فاقد متغیر باشد، ترمی بسته^۳ می‌نامیم. هر فرمولی که فاقد متغیر آزاد باشد را فرمول بسته^۴ یا جمله^۵ نامیم.

^۱bound occurrence^۲free occurrence^۳closed term^۴closed formula^۵sentence

۲-۱ تعبیر و ساختار

بعد از معرفی اجزاء زبان منطق مرتبه اول، می‌خواهیم بدانیم که فرمولی مرتبه اول، مثلاً $A_1(a_1)$ چه زمانی «درست» است؟ تنها چیزی که درباره این فرمول می‌دانیم این است که محمولی یک موضعی است و صدق خودش درباره ثابتی مانند a_1 را ادعا می‌کند. می‌توانیم فکر کنیم که این محمول درباره «کوچک بودن a_1 » است که در این صورت، طبیعتاً a_1 هم فردی است مثلاً «علی»، «رسول» یا ... اما همین محمول می‌تواند درباره «زوج بودن» یک عدد باشد و در این صورت a_1 هم طبیعتاً عددی خواهد بود مانند ۲ و یا شاید هم ۳. یا همین محمول می‌تواند درباره «گنگ بودن» یک عدد صحبت کند و a_1 عددی مانند $\frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد یا نسبت طلایی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

واقعیت این است که ما پاسخ این سؤال که $A_1(a_1)$ «درست» است یا نه را نمی‌دانیم! تنها زمانی قادر خواهیم بود صدق و کذب یک فرمول را تعیین کنیم که «منظور» دقیقمان از آن فرمول را مشخص کرده باشیم. منظور ما از «منظور»! چیزی است که آن را «تعبیر» خواهیم نامید. «تعبیر» در واقع آن چیزی است که «معنای» یک فرمول مرتبه اول را برای ما ملموس می‌کند.

ما، آنچنان که خواهیم دید، برای بررسی یک موضوع یا یک ساختار ریاضی از دیدگاه منطق مرتبه اول، لزوماً به همه نمادهای موجود در زبان منطق مرتبه اول نیاز نداریم. البته، بخش منطقی زبان همواره مورد نیاز است. همچنین، ما همواره نامتناهی متغیر را نیاز خواهیم داشت، مگر موضوع مورد بررسی ماهیتی متناهی داشته باشد، مثلاً زمانی که بخواهیم همه اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰ را از دیدگاه منطق مرتبه اول بررسی کنیم. بنابراین بسته به موضوع مورد بررسی، می‌توانیم تعداد مناسبی از نمادهای ثوابت، توابع و محمولات را انتخاب کنیم.

تعریف ۱-۲-۱.

(۱) برای زیر مجموعه‌ای از $\mathcal{L}_{fo}$ مانند $\mathcal{L}$ و مجموعه‌ای ناتهی مانند M ، منظور از یک $\mathcal{L}$ -تعبیر^۱ تابعیست مانند $\mathcal{I}_M$ که به شکل زیر عمل می‌کند:

$$(1-1) \quad \mathcal{I}_M \text{ به هر نماد ثابت } a \in \mathcal{L}, \text{ عضوی از } M \text{ را نظیر می‌کند.}$$

(۲-۱) $\mathcal{I}_M$ به هر نماد تابعی n -موضعی از $\mathcal{L}$ ، تابعی از M^n به M نظیر می‌کند. یعنی، تعبیر هر $f_k^n \in \mathcal{L}$ تابعی به شکل زیر است:

$$\begin{cases} \mathcal{I}_M(f_k^n) : M^n \longrightarrow M \\ \bar{m} \mapsto (\mathcal{I}_M(f_k^n))(\bar{m}) \end{cases}$$

(۳-۱) $\mathcal{I}_M$ به هر نماد محمولی n -موضعی از $\mathcal{L}$ ، زیرمجموعه‌ای از M^n را نظیر می‌کند.

به طور خلاصه، $\mathcal{I}_M$ به هر نماد ثابت، تابعی و محمولی از زبان به ترتیب عضوی، تابعی و محمولی در M نظیر می‌کند. هر جا امکان اشتباهی نباشد، به جای $\mathcal{I}_M$ می‌نویسیم $\mathcal{I}$.

^۱interpretation

(۲) مجموعه M را مرجع تعبیر، مجموعه مرجع، دامنه، جهان یا جهان سخن^۲ $\mathcal{I}$ می‌نامیم.

تعریف ۱-۲-۲. فرض کنید $\mathcal{I}_M$ یک $\mathcal{L}$ -تعبیر با مجموعه مرجع M باشد.

(۱) مجموعه M به همراه تعبیر عناصر $\mathcal{L}$ در آن را یک $\mathcal{L}$ -ساخت یا $\mathcal{L}$ -ساختار^۳ می‌نامیم و آن را با $\mathfrak{M}$ و گاهی به شکل تفصیل یافته زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathfrak{M} = \langle M, \{\mathcal{I}_M(a)\}_{a \in \mathcal{L}}, \{\mathcal{I}_M(f_k^n)\}_{f_k^n \in \mathcal{L}}, \{\mathcal{I}_M(A_k^n)\}_{A_k^n \in \mathcal{L}} \rangle.$$

(۲) اگر $a \in \mathcal{L}$ نماد ثابتی از زبان باشد، $\mathcal{I}_M(a)$ را تعبیر a در $\mathfrak{M}$ می‌نامیم و آن را با $a^{\mathfrak{M}}$ نمایش می‌دهیم. برای هر نماد تابعی در زبان مانند f_k^n ، تعبیر آن تحت $\mathcal{I}_M$ را با $(f_k^n)^{\mathfrak{M}}$ نمایش می‌دهیم. به طریق مشابه برای هر محمولی مانند $A_k^n \in \mathcal{L}$ که تعبیرش را با $(A_k^n)^{\mathfrak{M}}$ نشان می‌دهیم.

قرارداد ۱-۲-۳. هر جا که منظورمان روشن بوده و امکان اشتباه و ابهامی نباشد، به جای $\mathcal{L}$ -ساختار و $\mathcal{L}$ -تعبیر تنها خواهیم گفت ساختار و تعبیر.

مثال ۱-۲-۴. زبان $\mathcal{L} = \{A^{\mathfrak{r}}, R^{\mathfrak{r}}\}$ که تنها شامل دو نماد محمولی دو موضعی است در نظر بگیرید.

فرض کنید $M := \{-1, 0, 1\}$ باشد در این صورت می‌توانیم با استفاده از تعبیری مانند $\mathcal{I}_M$ مجموعه M را تبدیل به یک $\mathcal{L}$ -ساخت کنیم. برای این کار باید دو زیر مجموعه از $M^{\mathfrak{r}}$ را به ترتیب به عنوان تعبیرهای A و R معرفی کنیم:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_M(A^{\mathfrak{r}}) &= N_1 := \{(x, y) \in M^{\mathfrak{r}} \mid x = y\}, \\ \mathcal{I}_M(R^{\mathfrak{r}}) &= N_2 := \{(x, y) \in M^{\mathfrak{r}} \mid x < y\}.\end{aligned}$$

پس در واقع محمول A در M با «تساوی» و محمول R با «ترتیب» تعبیر می‌شوند. پس M به همراه این تعبیرها تبدیل به $\mathcal{L}$ -ساخت زیر می‌شود:

$$\mathfrak{M} = \langle M, N_1, N_2 \rangle.$$

و عملاً خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(A^{\mathfrak{r}})^{\mathfrak{M}} &= N_1 = \{(-1, -1), (0, 0), (1, 1)\}, \\ (R^{\mathfrak{r}})^{\mathfrak{M}} &= N_2 = \{(-1, 0), (-1, 1), (0, 1)\}.\end{aligned}$$

^۲domain or universe

^۳structure

می‌توان روی همین مجموعه مرجع، $\mathcal{L}$ - تعبیری دیگر مانند $\mathcal{I}'_M$ به شکل زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}'_M(A^\circ) &= N'_1 := \{(x, y) \in M^\circ | x = y\}, \\ \mathcal{I}'_M(R^\circ) &= N'_2 := \{(x, y) \in M^\circ | x + y = \circ\}.\end{aligned}$$

این تعبیر، منجر به بدست آمدن $\mathcal{L}$ - ساخت دیگری مانند $\mathfrak{M}'$ روی همان مجموعه مرجع قبلی، یعنی M ، می‌شود:

$$\mathfrak{M}' = \langle M, N'_1, N'_2 \rangle,$$

که برای آن داریم:

$$\begin{aligned}(A^\circ)^{\mathfrak{M}'} &= N'_1 = \{(-1, -1), (\circ, \circ), (1, 1)\}, \\ (R^\circ)^{\mathfrak{M}'} &= N'_2 = \{(\circ, \circ), (-1, 1), (1, -1)\}.\end{aligned}$$

سؤال ۱-۲-۵. چند $\mathcal{L}$ - تعبیر دیگر می‌توان با جهان سخن M تعریف کرد؟ (به تمرین زیر مراجعه کنید)

تمرین ۱-۲-۶. فرض کنید M مجموعه‌ای n عضوی است.

(۱) اگر $\mathcal{L}_1$ زبانی شامل تنها یک محمول یک موضعی باشد، به چند طریق می‌توان M را تبدیل به یک $\mathcal{L}_1$ - ساختار کرد؟ به بیان دیگر، چند $\mathcal{L}_1$ - تعبیر مختلف با مجموعه مرجع M می‌توان تعریف کرد؟

(۲) اگر $\mathcal{L}_2$ زبانی شامل یک نماد ثابت، یک محمول ۲ - موضعی و یک محمول ۳ - موضعی باشد، به چند طریق می‌توان M را به یک $\mathcal{L}_2$ - ساختار تبدیل کرد؟

تذکر ۱-۲-۷. همان‌طور که می‌بینید، در مثال‌های فوق، تنها ترم‌های موجود در زبان $\mathcal{L}$ ، متغیرها هستند. علت این است که در $\mathcal{L}$ نه از ثوابت خبری هست و نه از توابع.

مثال ۱-۲-۸. حالا قادریم به صورت‌بندی دقیق مثال ۱-۱-۱ اقدام کنیم. برای اینکه مثالمان کمی بهتر شود، صورت آن را به شکل زیر تغییر می‌دهیم:

«اگر رسول کوچک‌تر از برادر مسعود است و برادر مسعود کوچک‌تر از علی است،

آنگاه رسول کوچک‌تر از علی است»

زبان $\mathcal{L} = \{J^1, f^1, a_1, a_2, a_3\}$ که به ترتیب شامل یک نماد محمولی دو موضعی، یک نماد تابعی یک موضعی، و سه نماد برای ثوابت است را در نظر می‌گیریم. مجموعه مرجع M را مجموعه

همه انسان‌ها گرفته و تعبیر $\mathcal{I}_M$ را به این شکل تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{I}_M(a_1) := \text{رسول},$$

$$\mathcal{I}_M(a_2) := \text{علی},$$

$$\mathcal{I}_M(a_3) := \text{مسعود},$$

$$\mathcal{I}_M(f^1) := \text{تابعی که هر فرد را به برادرش نظیر می‌کند},$$

$$\mathcal{I}_M(J^2) := \{(x, y) \in M^2 \mid x \text{ کوچک‌تر از } y \text{ است}\}.$$

پس با این تعبیر، $\mathcal{L}$ -ساختی به شکل زیر خواهیم داشت:

$$\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{I}_M(J^2), \mathcal{I}_M(f^1), \text{رسول}, \text{علی}, \text{مسعود} \rangle.$$

و استدلال فوق، فرمولی مانند A به شکل زیر می‌شود:

$$J^2(a_1, f^1(a_3)) \wedge J^2(f^1(a_3), a_2) \rightarrow J^2(a_1, a_2).$$

همانطور که می‌بینیم A فرمولی بسته و یا یک جمله است. حال سوال این است که آیا A در $\mathfrak{M}$ «درست» است؟

به سوالی که در ابتدای این بخش مطرح کردیم برگردیم. فرمولی مانند $A(x)$ چه زمانی درست است؟

در ابتدا فرض کنید که فرمول ما متغیر آزادی ندارد، یعنی یک جمله است. مثلاً در زبان $\mathcal{L}$ که در مثال ۱-۲-۴ معرفی شد، فرمول زیر را در نظر بگیرید:

$$\forall x \exists y R^2(x, y).$$

اگر این جمله را در ساختار $\mathfrak{M}$ از همان مثال در نظر بگیریم، با توجه به تعریف تعبیر $\mathcal{I}$ ، این فرمول به طور شهودی بیان می‌کند که به ازای هر عضو در جهان سخن، یعنی M ، عنصری وجود دارد که اکیداً بزرگ‌تر از آن است. بنابراین، این جمله در $\mathfrak{M}$ غلط است. زیرا مثلاً برای ۱ چنین عضوی وجود ندارد. اما اگر درستی این جمله را در $\mathfrak{M}'$ از همان مثال بررسی کنیم، می‌بینیم که معنای شهودی آن در $\mathfrak{M}'$ درست است. زیرا برای هر عضوی، عضوی در M هست که جمعش با آن صفر بشود.

تمرین ۱-۲-۹. تحقیق کنید که آیا فرمول‌های زیر در ساختارهای $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{M}'$ از مثال ۱-۲-۴ درست هستند یا غلط؟ (این کار را با توجه به معنای شهودی که بر اساس تعبیرهای مورد اشاره دریافت می‌شود انجام دهید)

$$(۱) \quad \exists x \forall y R^{\mathcal{I}}(x, y)$$

$$(۲) \quad \exists x \forall y (\neg A^{\mathcal{I}}(x, y) \rightarrow R^{\mathcal{I}}(x, y))$$

$$(۳) \quad \exists x \forall y R^{\mathcal{I}}(y, x)$$

مثال ۱-۲-۱۰. فرض کنید $\mathcal{L} = \{A^{\mathcal{I}}, f^{\mathcal{I}}, a_1, a_2\}$ باشد و $M = \mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی باشد. می‌توانیم $A^{\mathcal{I}}$ را با تساوی، a_1 و a_2 را به ترتیب با ۰ و ۱ و $f^{\mathcal{I}}$ را با جمع اعداد طبیعی تعبیر کنیم. یعنی:

$$(a_1)^{\mathfrak{M}} = 0, (a_2)^{\mathfrak{M}} = 1,$$

و $(f^{\mathcal{I}})^{\mathfrak{M}}$ را تابعی بگیریم که به ازای هر دو عضو $x, y \in M$ به شکل زیر تعریف شود:

$$(f^{\mathcal{I}})^{\mathfrak{M}}(x, y) := x + y.$$

پس صورت تفصیل یافته $\mathfrak{M}$ به شکل زیر است:

$$\mathfrak{M} = \langle \mathbb{N}, 0, 1, +, = \rangle.$$

با توجه به تصویر شهودی که از معنای سورها داریم می‌توانیم تحقیق کنیم که جملات شماره یک تا چهار در زیر در $\mathfrak{M}$ درست هستند:

- (۱) $\forall x A^{\mathcal{I}}(f^{\mathcal{I}}(x, a_1), x)$
- (۲) $\forall xy A^{\mathcal{I}}(f^{\mathcal{I}}(x, f^{\mathcal{I}}(y, a_2)), f^{\mathcal{I}}(f^{\mathcal{I}}(x, y), a_2))$
- (۳) $\forall xy A^{\mathcal{I}}(f^{\mathcal{I}}(x, y), f^{\mathcal{I}}(y, x))$
- (۴) $\forall xyz A^{\mathcal{I}}(f^{\mathcal{I}}(f^{\mathcal{I}}(x, y), z), f^{\mathcal{I}}(x, f^{\mathcal{I}}(y, z)))$
- (۵) $\forall x \exists y A^{\mathcal{I}}(f^{\mathcal{I}}(x, y), a_1)$

تمرین ۱-۲-۱۱. با توجه به تعبیر به کار گرفته شده در مثال ۱-۲-۱۰، معنای هر یک از جملات ۱ تا ۵ را در $\mathcal{L}$ -ساختار $\mathfrak{M}$ بنویسید.

اما فرض کنید فرمولی داریم که دارای متغیر آزادی است، مثلاً فرمولی به شکل زیر را در زبان $\mathcal{L}$ از مثال ۱-۲-۴ در نظر بگیرید:

$$\exists y R^{\mathcal{I}}(x, y).$$

اگر معنای شهودی آن را در ساختار $\mathfrak{M}$ در نظر بگیریم، یک چنین چیزی است: «عنصری وجود دارد که از x اکیداً بزرگ‌تر است». همان‌طور که می‌بینیم، برای ما مشخص نیست که x به کدام عضو مجموعه مرجع اشاره می‌کند. در صورتی که این فرمول را در $\mathfrak{M}'$ هم بررسی کنیم، وضعیت مشابهی پیش می‌آید.

اساساً، ما هرجا مشغول بررسی فرمولی باشیم که حاوی متغیری آزاد باشد، به چنین وضعیتی روبرو خواهیم بود. به همین دلیل است که برای دانستن درستی یا غلطی یک فرمول در حالت کلی، ناچاریم علاوه بر تعبیر، موجود دیگری را هم به میان بیاوریم که «معنای» متغیرهای آزاد را هم برای ما مشخص کند. این موجود را یک «دنباله ارزش» خواهیم نامید.

تذکر ۱-۲-۱۲. بعد از ارائه تعریف دقیق یک دنباله ارزش و اثبات برخی ویژگی‌های آن، متوجه خواهیم شد منظور ما از این سوال که در $\mathcal{L}$ -ساختی مانند $\mathcal{M}$ ، اینکه فرمولی با متغیرهایی آزاد مانند $A(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ درست است یا غلط، عملاً به معنای بررسی صدق و کذب جمله‌ای است که از $A(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ بدست می‌آید و ما آن را بستار عمومی^۱ $A(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ می‌نامیم؛ بستار عمومی یک فرمول مانند $A(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ از بکار بستن سورهای عمومی روی همه متغیرهای آزاد آن بدست می‌آید. یعنی اگر همه متغیرهای آزاد $A(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ در بین $\{x_{i_j}\}_{j=1}^n$ باشند، بستار عمومی آن، جمله‌ای به شکل زیر خواهد بود:

$$\forall x_{i_1} \dots \forall x_{i_n} A(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}).$$

تعریف ۱-۲-۱۳. فرض کنید زبانی مانند $\mathcal{L}$ داده شده، و $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساخت باشد. منظور از یک دنباله ارزش^۲ به توی $\mathcal{M}$ تابعی است مانند

$$v : \{x_i\}_{i \in \omega} \longrightarrow M,$$

که به هر یک از متغیرهای زبان، عضوی از مجموعه مرجع را نظیر می‌کند. ما مقدار این تابع در x_i را با $v(i)$ و یا با v_i نیز نشان خواهیم داد.

از آنجا که ترم‌های زبان مجموعه‌ای استقرائی است، می‌توان به ازای یک دنباله ارزش داده شده مانند v ، اقدام به یافتن مقدار هر ترم زبان بر اساس v کرد:

تعریف ۱-۲-۱۴. فرض کنید زبانی مانند $\mathcal{L}$ داده شده، $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساخت و v دنباله ارزشی به توی $\mathcal{M}$ باشد. توسیع^۳ v که آن را با v^* نمایش می‌دهیم، تابعی است از مجموعه ترم‌ها به توی M که به نحو استقرائی به شکل زیر تعریف می‌شود:

(۱) به ازای هر متغیر مانند x_i ، تعریف می‌کنیم

$$v^*(x_i) := v(x_i).$$

^۱universal closure

^۳extension

^۲a sequence of values

(۲) به ازای هر نماد ثابت در زبان مانند a_i ، تعریف می‌کنیم:

$$v^*(a_i) := (a_i)^{\mathfrak{M}}.$$

(۳) به ازای هر نماد تابعی n -موضعی مانند $f_k^n \in \mathcal{L}$ و برای ترم‌هایی مانند $t_1, \dots, t_n \in \text{TERM}$ ، مقدار $v^*(f_k^n(t_1, \dots, t_n))$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$v^*(f_k^n(t_1, \dots, t_n)) := (f_k^n)^{\mathfrak{M}}(v^*(t_1), \dots, v^*(t_n)).$$

نمادگذاری ۱-۲-۱۵. به ازای $\mathcal{L}$ -ساختی مانند $\mathfrak{M}$ و یک دنباله ارزش v ، زمانی که امکان ابهام یا اشتباهی وجود ندارد، برای هر ترمی مانند t در زبان، به جای $v^*(t)$ می‌نویسیم $t^{\mathfrak{M}}$. دقت کنید که مقدار یک ترم بسته، یعنی ترمی که متغیری ندارد، تحت همه دنباله‌های ارزش و توسیع‌هایشان همواره یکسان است.

تمرین ۱-۲-۱۶. به ازای $\mathcal{L}$ -ساختی داده شده مانند $\mathfrak{M}$ ، با استقراء روی ترم‌ها نشان دهید که اگر v و w دو دنباله ارزش باشند که با هم مساویند، آنگاه توسیع‌های آنها نیز با هم مساوی خواهد بود؛ یعنی، داریم:

$$v^* = w^*.$$

تعریف ۱-۲-۱۷. دو دنباله ارزش مانند v و w را i -هم‌ارز^۱ گوئیم هرگاه در همه جا مگر احتمالاً در x_i مقدارشان با هم متفاوت باشد. در این صورت می‌نویسیم

$$v \stackrel{x_i}{=} w \quad \text{یا} \quad v \stackrel{i}{=} w.$$

حالا آماده‌ایم که تعریف کاملاً دقیقی از صدق یک فرمول دلخواه ارائه دهیم.

^۱i-equivalent

۳-۱ صدق و تعریف‌پذیری

همان‌طور که در انتهای بخش قبل دیدیم، برآورده شدن یا صدق یک فرمول نسبت به یک $\mathcal{L}$ -ساختار و یک دنباله ارزش تعیین می‌شود.

تعریف ۱-۳-۱ (تعریف صدق تارسکی).

به ازای $\mathcal{L}$ -ساختی مانند $\mathcal{M}$ و یک دنباله ارزش مانند v ، برآورده شدن^۱ فرمولی مانند A توسط $\mathcal{M}$ و v را با نماد زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathcal{M} \models_v A \quad \text{یا} \quad (\mathcal{M}, v) \models A.$$

این نماد را اینگونه می‌خوانیم که $\mathcal{M}$ و v یا زوج $(\mathcal{M}, v)$ فرمول A را برآورده می‌کند یا مدلی^۲ از آن است. یا اینکه A در $\mathcal{M}$ با دنباله ارزش v صدق می‌کند. در حالتی که $(\mathcal{M}, v)$ فرمولی مانند A را برآورده نکند می‌نویسیم

$$\mathcal{M} \not\models_v A \quad \text{یا} \quad (\mathcal{M}, v) \not\models A.$$

این مفهوم با استقراء روی فرمول‌ها تعریف می‌شود:

(۱) اگر A فرمولی اتمی مانند $A_k^n(t_1, \dots, t_n)$ است، در این صورت $\mathcal{M} \models_v A$ اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$(v^*(t_1), \dots, v^*(t_n)) \in (A_k^n)^{\mathcal{M}}.$$

(۲) $\mathcal{M} \models_v \neg A$ اگر و تنها اگر $(\mathcal{M}, v)$ فرمول A را برآورده نکند؛ یعنی $\mathcal{M} \not\models_v A$.

(۳) $\mathcal{M} \models_v A \rightarrow B$ اگر و تنها اگر داشته باشیم $\mathcal{M} \not\models_v A$ یا اینکه داشته باشیم $\mathcal{M} \models_v B$.

(۴) $\mathcal{M} \models_v A \wedge B$ اگر و تنها اگر داشته باشیم $\mathcal{M} \models_v A$ و $\mathcal{M} \models_v B$.

(۵) $\mathcal{M} \models_v A \vee B$ اگر و تنها اگر داشته باشیم $\mathcal{M} \models_v A$ یا $\mathcal{M} \models_v B$.

(۶) $\mathcal{M} \models_v A \leftrightarrow B$ اگر و تنها اگر داشته باشیم $\mathcal{M} \models_v A \rightarrow B$ و $\mathcal{M} \models_v B \rightarrow A$.

(۷) $\mathcal{M} \models_v \forall x_i A$ اگر و تنها اگر به ازای هر دنباله ارزش مانند w که i -هم‌ارز با v باشد داشته باشیم $\mathcal{M} \models_w A$.

(۸) $\mathcal{M} \models_v \exists x_i A$ اگر و تنها اگر داشته باشیم $\mathcal{M} \models_v \neg \forall x_i \neg A$. یا به عبارت دیگر، اگر و تنها اگر دنباله ارزشی مانند w وجود داشته باشد که i -هم‌ارز با v باشد و برای آن بداریم $\mathcal{M} \models_w A$.

^۱being satisfied

^۲ $\mathcal{M}$ and v models A .

آنچه در بالا آمد را تعریف صدق تارسکی^۳ می‌نامند و همان‌طور که قابل ملاحظه است کاملاً با شهود و انتظار ما از برآورده شدن یک فرمول منطبق است. قسمت هفتم تعریف بالا عملاً به این معناست که اگر متغیر x_i را به هر یک از اعضاء جهان سخن تصویر کنیم، فرمول A همچنان صادق می‌ماند و این همان چیزی است که ما از صدق سور عمومی انتظار داریم. در لم زیر و گزاره بعد از آن می‌بینیم که صدق یک فرمول نسبت به یک دنباله ارزش، تنها به مقدار آن دنباله در متغیرهای آزاد آن فرمول بستگی دارد.

لم ۱-۳-۲. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساخت و v و w دو دنباله ارزش به توی M باشند. به ازای هر ترم مانند $t \in \text{TERM}$ ، اگر $X = \{x_{i_j}\}_{j=1}^m$ مجموعه همه متغیرهای بکار گرفته شده در t باشد و برای هر $x_{i_j} \in X$ داشته باشیم $v(x_{i_j}) = w(x_{i_j})$ ، آنگاه خواهیم داشت

$$v^*(t) = w^*(t).$$

برهان. این لم را با استقراء روی ترم‌ها ثابت می‌کنیم.
قدم اول. اگر t یک نماد برای ثوابت مانند a_i باشد، بنابر تعریف ۱-۲-۱۴ داریم

$$v^*(t) = w^*(t) = a_i^{\mathcal{M}}.$$

قدم دوم. اگر t یک متغیر مانند x_i باشد، خواهیم داشت $x_i \in X$. در نتیجه بنابر فرض و تعریفِ توسیع یک دنباله ارزش خواهیم داشت

$$v^*(t) = v^*(x_i) = v(x_i) = w(x_i) = w^*(x_i) = w^*(t).$$

قدم سوم. فرض کنید که t به شکل $f_k^n(t_1, \dots, t_n)$ باشد و حکم برای $t_1, \dots, t_n$ برقرار است؛ یعنی به ازای هر $l \in \{1, \dots, n\}$ اگر مقدار v و w روی همه متغیرهای بکار گرفته شده در t_l یکسان باشد، آنگاه

$$v^*(t_l) = w^*(t_l). \quad (۱-۳-۴)$$

حال دقت کنید که هر متغیری که در هر یک از t_l ها بکار رفته باشد، در t نیز بکار رفته است؛ یعنی هر چنین متغیری عضوی از مجموعه X است. از طرفی، بنابر فرض، v و w روی همه متغیرهای موجود در X مقادیر یکسانی دارند. در نتیجه، به ازای هر $l \in \{1, \dots, n\}$ ، دو دنباله ارزش روی همه متغیرهای موجود در t_l مقادیر یکسانی خواهند داشت. پس بنابر فرضِ استقراء معادله (۴-۳-۱) برقرار خواهد بود.

^۳Tarski's definition of the truth

حال، بنابر تعریف ۱-۲-۱۴ خواهیم داشت

$$v^*(t) = v^*(f_k^n(t_1, \dots, t_n)) = (f_k^n)^{\mathfrak{M}}(v^*(t_1), \dots, v^*(t_n)),$$

که بنابر معادله (۱-۳-۴) برابر خواهد بود با

$$w^*(t) = w^*(f_k^n(t_1, \dots, t_n)) = (f_k^n)^{\mathfrak{M}}(w^*(t_1), \dots, w^*(t_n)).$$

■

گزاره ۱-۳-۳. فرض کنید $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساخت و v و w دو دنباله ارزش به توی M باشند. به ازای هر فرمول مانند $A \in \text{FORM}$ ، اگر $X = \{x_{i_j}\}_{j=1}^m$ مجموعه همه متغیرهای آزاد بکار گرفته شده در A باشد و برای هر $x_{i_j} \in X$ داشته باشیم $v(x_{i_j}) = w(x_{i_j})$ ، آنگاه خواهیم داشت

$$\mathfrak{M} \models_v A \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models_w A.$$

برهان. این گزاره را با استقراء روی فرمول‌ها ثابت می‌کنیم.
 قدم اول. اگر A فرمولی اتمی مانند $A_k^n(t_1, \dots, t_n)$ باشد، آنگاه بنابر لم ۱-۳-۲، به ازای هر $l \in \{1, \dots, n\}$ خواهیم داشت

$$v^*(t_l) = w^*(t_l).$$

در نتیجه، بنابر قسمت (۱) از تعریف صدق (تعریف ۱-۳-۱)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models_v A &\Leftrightarrow (v^*(t_1), \dots, v^*(t_n)) \in (A_k^n)^{\mathfrak{M}} \\ &\Leftrightarrow (w^*(t_1), \dots, w^*(t_n)) \in (A_k^n)^{\mathfrak{M}} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_w A. \end{aligned}$$

قدم دوم. فرض کنیم که A به شکل $\neg B$ باشد و حکم درباره B برقرار باشد؛ در نتیجه، اگر v و w روی همه متغیرهای آزاد B مقادیر یکسانی داشته باشند، آنگاه داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models_v B \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models_w B.$$

از طرفی، به وضوح مجموعه متغیرهای آزاد موجود در دو فرمول A و B یکی است. بنابراین، از فرض گزاره درباره فرمول A نتیجه می‌شود که v و w مقادیر یکسانی روی متغیرهای آزاد موجود

در B خواهند داشت. پس، بنابر فرض استقراء، خواهیم داشت

$$\mathfrak{M} \models_v B \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_w B.$$

از معادله فوق و قسمت (۲) از تعریف صدق (تعریف ۱-۳-۱)، داریم

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \models_v A &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_v \neg B \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models_v B \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models_w B \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_w \neg B \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_w A. \end{aligned}$$

قدم سوم. فرض کنیم که A به شکل $B \rightarrow C$ باشد و حکم درباره B و C برقرار باشد. مجموعه همه متغیرهای آزاد موجود در A مساوی با اجتماع مجموعه متغیرهای آزاد موجود در B و C است. بنابراین، v و w روی همه متغیرهای آزاد موجود در B و C مقادیر یکسانی دارند. پس بنابر فرض استقراء، داریم

$$\mathfrak{M} \models_v B \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_w B, \quad (۵-۳-۱)$$

و

$$\mathfrak{M} \models_v C \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models_w C. \quad (۶-۳-۱)$$

حال فرض کنیم $\mathfrak{M} \models_v A$. بنابر قسمت (۳) از تعریف صدق، یا داریم $\mathfrak{M} \not\models_v B$ و یا داریم $\mathfrak{M} \models_v C$. در صورت اول، بنابر معادله (۵-۳-۱) خواهیم داشت

$$\mathfrak{M} \not\models_w B,$$

که بنابر قسمت (۳) از تعریف صدق نتیجه می‌دهد $\mathfrak{M} \models_w A$. در صورتی که داشته باشیم $\mathfrak{M} \models_v C$ ، با استفاده از معادله (۶-۳-۱) خواهیم داشت $\mathfrak{M} \models_w C$. در این حالت نیز، قسمت (۳) از تعریف صدق نتیجه می‌دهد که $\mathfrak{M} \models_w A$.

اگر فرض کنیم که $\mathfrak{M} \models_w A$ با استدلال مشابهی خواهیم داشت

$$\mathfrak{M} \models_v A.$$

قدم چهار تا شش. مشابه به قدم سوم.

قدم هفتم. فرض کنیم A به شکل $\forall x_i B$ باشد که حکم درباره B برقرار است. همان‌طور که می‌دانیم، فرض استقراء این است که حکم درباره B برقرار است. برای اینکه تصویر روشن‌تری داشته باشیم بیاید در این حالت فرض استقراء را به شکل دقیق بنویسیم:

فرض استقراء: به ازای هر دو دنباله ارزش مانند v' و w' در صورتی که v' و w' روی متغیرهای آزاد B مقادیر یکسانی اختیار کنند، آنگاه خواهیم داشت $\mathcal{M} \models_{v'} B$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M} \models_{w'} B$.

حال اگر داشته باشیم $\mathcal{M} \models_v A$ ، بنابر قسمت (۷) از تعریف صدق، به ازای هر دنباله ارزش i -هم‌ارز با v مانند v' داریم $\mathcal{M} \models_{v'} B$. می‌خواهیم نشان دهیم که $\mathcal{M} \models_w \forall x_i B$.
حالت اول. x_i در بین متغیرهای آزاد B نباشد. فرض کنید w' دنباله ارزشی i -هم‌ارز با w باشد. به ازای هر متغیری مثل x که در B آزاد است خواهیم داشت $x \neq x_i$. پس مقدار w' روی همه متغیرهای آزاد B با w و در نتیجه با v یکی است. پس بنابر فرض استقراء درباره B خواهیم داشت

$$\mathcal{M} \models_v B \Leftrightarrow \mathcal{M} \models_{w'} B. \quad (۷-۳-۱)$$

از طرفی بنابر فرض داریم $\mathcal{M} \models_v \forall x_i B$ که به ویژه به این معنی است که $\mathcal{M} \models_v B$. بنابر معادله (۷-۳-۱) خواهیم داشت $\mathcal{M} \models_{w'} B$. بنابراین، داریم

$$\mathcal{M} \models_w \forall x_i B,$$

که همان $\mathcal{M} \models_w A$ است.

حالت دوم. x_i در بین متغیرهای آزاد B باشد. در این صورت اگر w' دنباله ارزشی i -هم‌ارز با w باشد، این دنباله ارزش همه جا شبیه به w است مگر احتمالاً در x_i . با استفاده از w' دنباله ارزشی مانند v' به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$v'(x_j) := \begin{cases} v(x_j), & \text{اگر } x_j \neq x_i \\ w'(x_j), & \text{اگر } x_j = x_i \end{cases} \quad (۸-۳-۱)$$

به راحتی دیده می‌شود که v' دنباله‌ای i -هم‌ارز با v است. بنابر فرض داشتیم $\mathcal{M} \models_v \forall x_i B$ که، به ویژه، نتیجه می‌دهد

$$\mathcal{M} \models_{v'} B. \quad (۹-۳-۱)$$

از طرفی، بنابر تعریف v' ، این دنباله ارزش روی همه متغیرهای آزاد B با w' برابر است. زیرا، یا این متغیر آزاد همان x_i است که طبق معادله (۸-۳-۱) داریم $v'(x_i) = w'(x_i)$ یا اینکه متغیری

دیگر مانند x است. که در این صورت هم بنابر نحوه انتخاب w و v ، معادله (۱-۳-۸) و فرض i -هم‌ارز بودن w و w' خواهیم داشت

$$v'(x) = v(x) = w(x) = w'(x).$$

پس بنابر معادله (۱-۳-۹) و فرض استقراء درباره B خواهیم داشت

$$\mathfrak{M} \models_{w'} B.$$

و نهایتاً، بنابر قسمت (۷) از تعریف صدق خواهیم داشت

$$\mathfrak{M} \models_w A.$$

قدم هشتم. از آنجا که صدق سور وجودی را بر اساس صدق نقیض و سور عمومی تعریف کردیم، نیازی به اثبات جداگانه این قدم نداریم. ■

تمرین ۱-۳-۴. قدم‌های چهارم تا ششم استدلال گزاره ۱-۳-۳ را به شکل دقیق بنویسید.

گزاره ۱-۳-۵. زبان $\mathcal{L}$ مفروض است. اگر A جمله‌ای در این زبان و $\mathfrak{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساخت باشد، آنگاه

(۱) به ازای هر دو دنباله ارزش مانند v و w داریم

$$\mathfrak{M} \models_v A \iff \mathfrak{M} \models_w A.$$

(۲) همواره یکی از این دو حالت اتفاق می‌افتد: یا به ازای هر دنباله ارزش مانند v در $\mathfrak{M}$ داریم $\mathfrak{M} \models_v A$ ، یا اینکه هیچ دنباله ارزشی مانند v یافت نمی‌شود که در $\mathfrak{M}$ جمله A را برآورده کند.

برهان. (۱) دقت کنید که هر دو دنباله ارزش روی همه متغیرهای آزاد جمله‌ای مانند A مقادیر یکسانی اختیار می‌کنند؛ زیرا یک جمله اساساً متغیر آزادی ندارد. در نتیجه، بنابر گزاره ۱-۳-۳، خواهیم داشت

$$\mathfrak{M} \models_v A \iff \mathfrak{M} \models_w A.$$

(۲) دقت کنید که یا دنباله ارزشی وجود دارد که جمله A را در $\mathfrak{M}$ برآورده می‌کند یا خیر؛ حال قسمت دوم مستقیماً از قسمت اول نتیجه می‌شود. ■

در اینجا مناسب است که مفهومی مهم در نظریه مدل‌ها به نام تعریف‌پذیری را معرفی کنیم؛ قبل از آن به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱-۳-۶. ساختار زیر را در نظر بگیرید

$$\mathfrak{N}_+ := \langle \mathbb{N}, =, +, \circ \rangle.$$

و فرمولی مانند $\varphi(x)$ را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\exists y(x = y + y).$$

دقت کنید که ما در زبانی هستیم به شکل $\mathcal{L} = \{A^2, f^2, a\}$ و فرمول بالا در اصل به این شکل است:

$$\exists y(A^2(x, f^2(y, y))).$$

اگر سعی کنیم با کمی دقت، و بر اساس تعابیر موجود در $\mathfrak{N}_+$ و تعریف صدق برای سور وجودی، معنای فرمول $\varphi(x)$ در $\mathfrak{N}_+$ را دریابیم، این فرمول عملاً چنین چیزی را می‌گوید:

« x زوج است»

بر خلاف آنچه درباره جملات در گزاره ۱-۳-۵ دیدیم، می‌توان دنباله ارزشی مانند v را به نحوی پیدا کرد که برای آن داشته باشیم

$$\mathfrak{N}_+ \models_v \varphi(x),$$

و همچنین، می‌توان دنباله ارزشی مانند w را به نحوی پیدا کرد که برای آن داشته باشیم

$$\mathfrak{N}_+ \models_w \neg \varphi(x).$$

کافیست داشته باشیم $v(x) = 4$ و $w(x) = 7$. در واقع، می‌توان این مطلب را کمی کلی‌تر بررسی کرد و از مجموعه جواب‌های یک فرمول در یک ساختار پرسید. به عنوان مثال، «مجموعه جواب‌های فرمول $\varphi(x)$ » در ساختار $\mathfrak{N}_+$ عبارت است از همه اعداد طبیعی زوج.

در حالت کلی نیز شبیه به مثال بالا، درباره فرمولی که دارای یک یا چند متغیر آزاد است می‌توان، بر خلاف یک جمله، این سؤال را پرسید که:

سؤال ۱-۳-۷. در یک ساختار داده شده چه عناصری از آن ساختار در آن فرمول صدق می‌کنند؟

از آنجا که ما، بنابر ضرورت، صدق فرمول‌ها را با استفاده از دنباله‌های ارزش نامتناهی تعریف کردیم^۱، این پرسش باید به شکل دقیق‌تری بیان شود که آن را در تعریف بعدی خواهیم دید.

^۱ صدق فرمول‌ها در یک ساختار را می‌توان با استفاده از دنباله‌های متناهی نیز تعریف کرد. در این صورت، تعریف صدق برای سور عمومی و وجودی

با پیچیدگی‌های همراه می‌شود که ما ترجیح می‌دهیم با استفاده از دنباله‌های نامتناهی از آنها اجتناب کنیم.

تذکر ۱-۳-۸. مجدداً تکرار می‌کنم به دلیل آنچه که گزاره ۱-۳-۵ بیان می‌کند، پرسش بالا درباره یک جمله اساساً مطرح نمی‌شود. در واقع تفاوت بسیار مهم بین یک جمله و یک فرمول، این است که یک جمله حکمی را درباره کل یک ساختار بیان می‌کند، اما یک فرمول همان‌طور که در تعریف زیر دیده می‌شود همواره دارای مجموعه جوابی در یک ساختار است. آنچنان که در بخش ۱-۵ خواهیم دید، اولین و بنیادی‌ترین تفاوت بین دو ساختار مرتبه اول توسط جملاتی تعیین می‌شود که در آنها صادق یا کاذبند.

نمادگذاری ۱-۳-۹. در صورتی که یک دنباله ارزش مثل v به توی ساختاری مانند $\mathcal{M}$ به متغیرهای $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ به ترتیب مقادیر $b_1, \dots, b_n$ از اعضای M را نظیر کند، این دنباله ارزش را به یکی از اشکال زیر نمایش می‌دهیم:

$$v[b_1 \dots b_n / x_{i_1} \dots x_{i_n}] \quad \text{یا} \quad v_{b_1 \dots b_n / x_{i_1} \dots x_{i_n}}.$$

در صورتی که امکان ابهام یا اشتباهی نباشد از نمادهای مختصرتر $v[\bar{b}/\bar{x}]$ یا $v_{\bar{b}/\bar{x}}$ استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۱-۳-۱۰. $\mathcal{L}$ -ساختار $\mathcal{M}$ و $\mathcal{L}$ -فرمول $\varphi(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ که دقیقاً دارای n متغیر آزاد است مفروضند.

(۱) مجموعه جواب‌های^۱ فرمول $\varphi(\bar{x})$ در $\mathcal{M}$ تعریف می‌شود:

$$\left\{ (b_1, \dots, b_n) \in M^n \mid \mathcal{M} \models_{v_{\bar{b}/\bar{x}}} \varphi(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \text{ باشیم} \right\}.$$

این مجموعه را با $\varphi(\mathcal{M}^n)$ نمایش می‌دهیم.

(۲) زیرمجموعه $A \subseteq M^n$ را مجموعه‌ای تعریف‌پذیر^۲ با بعد n می‌گوییم هرگاه مجموعه جواب‌های فرمولی مانند $\varphi(\bar{x})$ در $\mathcal{M}$ باشد.

(۲) زیرمجموعه $A \subseteq M^n$ را مجموعه‌ای تعریف‌ناپذیر^۳ با بعد n می‌گوییم هرگاه مجموعه‌ای تعریف‌پذیر نباشد.

تذکر ۱-۳-۱۱. دقت کنید که بنابر گزاره ۱-۳-۳، می‌توانستیم قسمت اول از تعریف ۱-۳-۱۰، یعنی مجموعه $\varphi(M^n)$ ، را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\left\{ (b_1, \dots, b_n) \in M^n \mid \mathcal{M} \models_{v_{\bar{b}/\bar{x}}} \varphi(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \text{ باشیم} \right\},$$

که با آن معادل می‌بود (تمرین: این مسئله را تحقیق کنید).

^۱the set of solutions

^۲undefinable

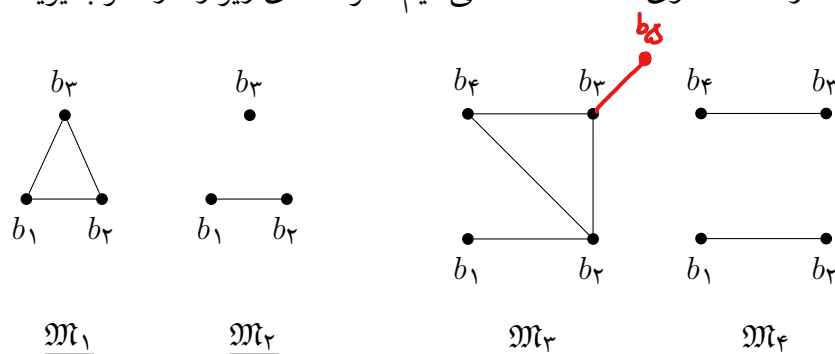
^۳definable

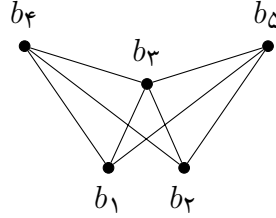
یکی از اصلی ترین مسائل در نظریه مدل ها به این مطلب می پردازد که مجموعه های تعریف پذیر در یک ساختار مرتب اول چه ویژگی هایی دارند. کافیت به این مسئله دقت کنید که تعداد مجموعه های تعریف پذیر در یک $\mathcal{L}$ -ساختار داده شده، به اندازه همه فرمول های خوش ساخت در زبان $\mathcal{L}$ است!

برای داشتن تصویری از اینکه فرمول های موجود در یک زبان تا چه حد می توانند پیچیده باشند به مثالی از سلسله مراتبی از فرمول ها که از تعویض مداوم سورهای وجودی و عمومی پدید می آید توجه کنید:

$$\begin{array}{ll}
 \varphi(x), & \\
 \exists y \varphi(x, y), & \forall y \varphi(x, y), \\
 \exists y \forall z \varphi(x, y, z), & \forall y \exists z \varphi(x, y, z), \\
 \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \varphi(x, y_1, y_2, y_3), & \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \varphi(x, y_1, y_2, y_3), \\
 \vdots & \\
 \exists y_1 \forall y_2 \dots \forall y_{n-1} \exists y_n \varphi(x, y_1, \dots, y_n), & \forall y_1 \exists y_2 \dots \exists y_{n-1} \forall y_n \varphi(x, y_1, \dots, y_n), \\
 \vdots &
 \end{array}$$

مثال ۱-۳-۱۲. زبان $\mathcal{L}_{\text{graph}} = \{A^2, R^2\}$ شامل دو نماد محمولی دو موضعی که مناسب برای مطالعه گراف هاست را در نظر می گیریم. در این مثال در هر $\mathcal{L}_{\text{graph}}$ -ساختی که در نظر می گیریم، A^2 را با تساوی و R^2 را به رابطه موجود در گراف تعبیر می کنیم؛ به همین دلیل، در فرمول ها به جای A^2 از نماد تساوی « $=$ » استفاده می کنیم. گراف های زیر را در نظر بگیرید:



 $\mathfrak{M}_5$

حال دقت کنید که داریم:

$$\mathfrak{M}_1 \models \forall xy(\neg(x = y) \rightarrow R(x, y)). \quad (10-3-1)$$

$$\mathfrak{M}_1 \models \forall x\exists y(\neg(x = y) \wedge R(x, y)). \quad (11-3-1)$$

$$\mathfrak{M}_2 \models \exists xyz((x \neq y) \wedge (x \neq z) \wedge (y \neq z) \wedge R(x, y) \wedge R(y, z) \wedge R(z, x)). \quad (12-3-1)$$

$$\mathfrak{M}_2 \models \exists x\forall y(\neg R(x, y)). \quad (13-3-1)$$

$$\mathfrak{M}_2 \models \exists x_1 x_2 x_3 x_4 \left(\bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i, j=1}}^4 x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=1}^3 R(x_i, x_{i+1}) \right). \quad (14-3-1)$$

$$\mathfrak{M}_5 \models \exists x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \left(\bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i, j=1}}^5 x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i=2}^5 R(x_1, x_i) \right). \quad (15-3-1)$$

تذکر ۱-۳-۱۳. دقت کنید که ما در عبارات فوق از نماد « $\models$ » بدون هیچ زیرنویسی استفاده کردیم که تا اینجا کار برای ما بی معنی است! یعنی ما تا اینجا تنها نمادی مانند « $\models_v$ » را می شناسیم که با توجه به یک دنباله ارزش مانند v تعریف شده است. اما، به این علت که در عبارات بالا هر

فرمولی که در نظر گرفتیم یک جمله بود، این کار با توجه به گزاره ۱-۳-۵ چندان هم بی معنی و غلط نیست؛ ما در تعاریف ۱-۳-۱۸ و ۱-۳-۲۲ نماد « $\models$ » بدون هیچ زیر نویسی را معرفی خواهیم کرد.

حال، فرمولی مانند $\varphi_1(x)$ را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\forall y \neg R(x, y).$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\varphi_1(\mathcal{M}_2) = \{b_2\}.$$

اگر $\varphi_2(x)$ فرمولی به شکل زیر باشد:

$$\exists y_1 y_2 y_3 \left(\bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i, j=1}}^3 y_i \neq y_j \wedge \bigwedge_{i=1}^3 x \neq y_i \wedge \bigwedge_{i=1}^3 R(x, y_i) \right),$$

خواهیم داشت

$$\varphi_2(\mathcal{M}_3) = \{b_2\}.$$

اگر $\varphi_3(x, y)$ فرمولی به شکل زیر باشد:

$$x \neq y \wedge \neg R(x, y) \wedge \exists z (z \neq x \wedge z \neq y \wedge R(x, z) \wedge R(z, y)).$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \varphi_3(\mathcal{M}_1^2) &= \varphi_3(\mathcal{M}_2^2) = \varphi_3(\mathcal{M}_4^2) = \emptyset, \\ \varphi_3(\mathcal{M}_3^2) &= \{(b_1, b_2), (b_1, b_4), (b_2, b_1), (b_4, b_1)\}, \\ \varphi_3(\mathcal{M}_5^2) &= \{(b_1, b_2), (b_2, b_1), (b_4, b_5), (b_5, b_4)\}. \end{aligned}$$

تمرین ۱-۳-۱۴. مجموعه جواب‌های فرمول‌های $\varphi_1(x)$ و $\varphi_2(x)$ معرفی شده در بالا، را در ساختارهای $\mathcal{M}_1$ تا $\mathcal{M}_5$ بدست آورید.

تمرین ۱-۳-۱۵. همه فرمول‌های خواسته شده در زبان گراف‌ها، یعنی $\mathcal{L}_{\text{graph}}$ ، هستند.

(۱) فرمولی مانند $\varphi(x)$ با تنها یک متغیر آزاد بنویسید که در ساختار $\mathcal{M}_2$ برای آن داشته باشیم

$$\varphi(\mathcal{M}_2) = \{b_1, b_2\}.$$

(۲) فرمول‌هایی مانند $\varphi_1(x)$ و $\varphi_2(x)$ با تنها یک متغیر آزاد بنویسید که در ساختار $\mathcal{M}_5$ برای آنها داشته باشیم

$$\varphi_1(\mathcal{M}_5) = \{b_3\} \quad \text{و} \quad \varphi_2(\mathcal{M}_5) = \{b_1, b_2, b_4, b_5\}.$$

(۳) فرمولی مانند $\varphi(x, y)$ با تنها دو متغیر آزاد بنویسید که در ساختار $\mathcal{M}_3$ برای آن داشته باشیم

$$\varphi(\mathcal{M}_3) = \{(b_1, b_4)\}.$$

(۴) فرمول‌هایی مانند $\varphi_1(x)$ و $\varphi_2(x)$ با تنها یک متغیر آزاد بنویسید که در ساختار $\mathcal{M}_3$ برای آنها داشته باشیم

$$\varphi_1(\mathcal{M}_3) = \{b_1\}, \quad \text{و} \quad \varphi_2(\mathcal{M}_3) = \{b_4\}.$$

(راهنمایی: برای یافتن $\varphi_2(x)$ از فرمول $\varphi_1(x)$ و قسمت سوم همین تمرین استفاده کنید)
تذکر ۱-۳-۱۶. همان‌طور که گفته شد، داشتن توصیفی ملموس از مجموعه‌های تعریف‌پذیر یک ساختار از قدم‌های اساسی در شناخت آن ساختار است. به همین دلیل تکنیک‌ها و روش‌های مختلفی برای بدست دادن توصیفی هر چه ساده‌تر از مجموعه‌های تعریف‌پذیر یک ساختار در نظریه مدل‌ها وجود دارند که به مطالعه مفاهیم مهمی مانند حذف سورا، مدل-کامل بودن^۲، نزدیک به مدل-کامل بودن^۳، توابع اسکولمی^۴ و ... می‌انجامند. در این درس مجالی برای پرداختن مفصل به این مفاهیم نیست؛ پرداختن به این مفاهیم و تکنیک‌ها در طی یک درس پیشرفته‌تر در منطق و نظریه مدل‌ها میسر است. ما در این درس تنها به معرفی مختصری از توابع اسکولمی بسنده خواهیم کرد. نکته بسیار حائز اهمیت، این است که مجموعه‌های تعریف‌پذیر یک ساختار به طور کاملاً مستقیم تحت تاثیر زبانی است که برای بررسی آن ساختار در نظر می‌گیریم.

تمرین ۱-۳-۱۷.

(۱) فرض کنید $\mathcal{L}$ زبانی متناهی باشد. نشان دهید

$$|\text{TERM}| = \aleph_0 \quad \text{و} \quad |\text{FORM}| = \aleph_0.$$

(۲) نشان دهید که اگر $\mathcal{L}$ زبانی شمارا باشد، عبارات داده شده در قسمت (۱) همچنان برقرارند.

(۳) فرض کنید $\mathcal{L}$ زبانی شمارا و $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساخت نامتناهی باشد. نشان دهید که تعداد مجموعه‌های تعریف‌ناپذیر $\mathcal{M}$ اکیداً از تعداد مجموعه‌های تعریف‌پذیر $\mathcal{M}$ بیشتر است.

^۱quantifier elimination

^۴Skölem functions

^۲model-completeness

^۳near model-completeness

حال، آماده‌ایم که مفهوم کلی‌تر و مهم‌تر برآورده شدن یک فرمول در یک $\mathcal{L}$ -ساخت را تعریف کنیم. ابتدا این کار را برای جملات انجام می‌دهیم:

تعریف ۱-۳-۱۸ (صدق در یک ساختار برای جملات).

فرض کنید A یک $\mathcal{L}$ -جمله و $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}$ -ساخت باشد. گوییم A در $\mathcal{M}$ درست یا صادق^۱ است یا اینکه $\mathcal{M}$ مدلی برای A است و می‌نویسیم

$$\mathcal{M} \models A,$$

هرگاه به ازای هر دنباله ارزش مانند v به توی M داشته باشیم $\mathcal{M} \models_v A$. در غیر این صورت، می‌گوییم A در $\mathcal{M}$ غلط یا کاذب^۲ است؛ این مطلب را با نماد زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathcal{M} \not\models A.$$

گزاره ۱-۳-۱۹. اگر A یک $\mathcal{L}$ -جمله باشد، آنگاه

$$\mathcal{M} \not\models A \iff \mathcal{M} \models \neg A.$$

برهان. فرض کنید $\mathcal{M} \not\models A$ ، بنابر تعریف ۱-۳-۱۸، دنباله ارزشی مانند v یافت می‌شود که برای آن داریم $\mathcal{M} \not\models_v A$. بنابر تعریف ۱-۳-۱، خواهیم داشت $\mathcal{M} \models_v \neg A$. بنابر گزاره ۱-۳-۵، به ازای هر دنباله ارزش مانند w نیز خواهیم داشت:

$$\mathcal{M} \models_w \neg A.$$

■ جهت دیگر حکم تنها از تعریف ۱-۳-۱ و تعریف ۱۸-۳-۱ بدست می‌آید.

نتیجه ۱-۳-۲۰. در هر زبانی مانند $\mathcal{L}$ و به ازای هر $\mathcal{L}$ -ساخت $\mathcal{M}$ و هر $\mathcal{L}$ -جمله مانند A همواره یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:

$$\mathcal{M} \models A \quad \text{یا} \quad \mathcal{M} \models \neg A.$$

برهان. دقت کنید که به ازای هر جمله مانند A یا داریم $\mathcal{M} \models A$ و یا $\mathcal{M} \not\models A$. حال، نتیجه مورد نظر از گزاره ۱-۳-۱۹ به دست می‌آید. ■

تذکره ۱-۳-۲۱. بعد از معرفی مفهوم کامل یا تمام بودن یک نظریه مرتبه اول اهمیت نتیجه فوق بیشتر مشخص می‌شود.

^۱true

^۲false

برای داشتن تعریفی قابل قبول از صدق یک فرمول در یک ساختار، می‌خواهیم که این تعریف به گونه‌ای باشد که گزاره ۱-۳-۱۹ برای آن برقرار بماند؛ زیرا، این مطلب با انتظار طبیعی و شهودی ما از صدق منطبق است. از طرفی، بدیهی است که استدلال به کار گرفته شده در گزاره بالا برای فرمولی که دارای متغیر آزادی است کارساز نیست. ما ناچاریم تعریفمان از صدق یک فرمول در یک ساختار را به نحوی ارائه دهیم که خاصیت فوق برای آن برقرار باشد!

ممکن است در این مورد فکر کنید که ما مشغول حرکت در خلاف جهت طبیعی ریاضی‌ورزی به شکلی هستیم که اغلب دیده‌ایم اما گاهی این وضعیت در ریاضیات پیش می‌آید و این بهایی است که برای دقت می‌پردازیم.

تعریف ۱-۳-۲۲ (صدق در یک ساختار برای فرمول‌ها).
فرض کنید $A(\bar{x})$ یک $\mathcal{L}$ -فرمول با دقیقاً n متغیر آزاد ظاهر شده در $\bar{x}$ باشد. همچنین، فرض کنید که $\mathcal{L}$ -ساخت $\mathfrak{M}$ داده شده است.

(۱) فرمول $A(\bar{x})$ را در $\mathfrak{M}$ برآورده شدنی^۱ خوانیم هرگاه مجموع جواب‌های آن در $\mathfrak{M}$ ناتهی باشد؛ یعنی داشته باشیم

$$A(\mathfrak{M}^n) \neq \emptyset.$$

در غیر این صورت، آنرا برآورده ناشدنی^۲ می‌نامیم.

(۲) گوییم $A(\bar{x})$ در $\mathfrak{M}$ درست یا صادق^۳ است یا اینکه $\mathfrak{M}$ مدلی برای $A(\bar{x})$ است و می‌نویسیم

$$\mathfrak{M} \models A(\bar{x}),$$

هرگاه به ازای هر دنباله ارزش مانند v به توی M داشته باشیم $\mathfrak{M} \models_v A(\bar{x})$.

گزاره ۱-۳-۲۳. فرمول $A(\bar{x})$ ، که دقیقاً دارای متغیرهای آزاد موجود در $\bar{x}$ است، در $\mathfrak{M}$ برآورده شدنی است اگر و تنها اگر داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \exists \bar{x} A(\bar{x}).$$



برهان. مستقیماً از تعاریف نتیجه می‌شود.

تمرین ۱-۳-۲۴. اثبات گزاره ۱-۳-۲۳ را به شکل دقیق بنویسید.

گزاره زیر مابه‌ازای گزاره ۱-۳-۱۹ برای فرمول‌هاست:

گزاره ۱-۳-۲۵. زبان $\mathcal{L}$ و $\mathcal{L}$ -ساخت $\mathfrak{M}$ مفروضند. به ازای هر $\mathcal{L}$ -فرمول مانند $A(\bar{x})$ داریم

^۱satisfiable
^۲unsatisfiable

^۳true

(۱) $A(\bar{x})$ در $\mathcal{M}$ برآورده ناشدنی است اگر و تنها اگر $\neg A(\bar{x})$ در $\mathcal{M}$ درست باشد.

(۲) $\neg A(\bar{x})$ در $\mathcal{M}$ برآورده ناشدنی است اگر و تنها اگر $A(\bar{x})$ در $\mathcal{M}$ درست باشد.

برهان. (۱) فرض کنیم $A(\bar{x})$ در $\mathcal{M}$ برآورده ناشدنی است. طبق تعریف ۱-۳-۲۲ و تعریف ۱۰-۳-۱، به ازای هر n -تایی در M مانند $\bar{b}$ و هر دنباله ارزش مانند $v_{\bar{b}/\bar{x}}$ داریم $\mathcal{M} \not\models_{v_{\bar{b}/\bar{x}}} A(\bar{x})$. در نتیجه بنابر تعریف ۱-۳-۱، به ازای هر دنباله ارزش مانند v داریم

$$\mathcal{M} \models_v \neg A(\bar{x}).$$

قسمت (۲) با استدلال مشابهی و با اندکی تغییرات بدست می‌آید. ■

تمرین ۱-۳-۲۶. استدلال قسمت (۲) از گزاره ۱-۳-۲۵ را به طور دقیق بنویسید.

تذکر ۱-۳-۲۷. دقت کنید که هر دو قسمت گزاره ۱-۳-۲۵ لازمند؛ یعنی، هیچ کدام از دیگری بدست نمی‌آید.

نتیجه ۱-۳-۲۸. برای یک فرمول A و یک ساختار داده شده $\mathcal{M}$ نمی‌توانیم به طور همزمان داشته باشیم $\mathcal{M} \models A$ و $\mathcal{M} \models \neg A$.

برهان. مستقیماً از گزاره ۱-۳-۲۵ نتیجه می‌شود. ■

گزاره ۱-۳-۲۹. به ازای هر فرمول A ، هر ساختار $\mathcal{M}$ و هر متغیر مانند x_i داریم

$$\mathcal{M} \models A \iff \mathcal{M} \models \forall x_i A.$$

برهان. ($\Leftarrow$) اگر v دنباله ارزش دلخواهی باشد، بنابر تعریف ۱-۳-۲۲، می‌دانیم که $\mathcal{M} \models_v \forall x_i A$. طبق تعریف ۱-۳-۱، خواهیم داشت $\mathcal{M} \models_v A$. از آنجا که v دلخواه بود، خواهیم داشت

$$\mathcal{M} \models A.$$

($\Rightarrow$) اگر v دنباله ارزش دلخواهی باشد، می‌خواهیم نشان دهیم $\mathcal{M} \models_v \forall x_i A$. اگر w دنباله ارزشی i -هم‌ارز با v باشد، بنابر فرض و تعریف ۱-۳-۲۲، خواهیم داشت $\mathcal{M} \models_w A$ که نتیجه مورد نظر را بدست می‌دهد. ■

تعریف ۱-۳-۳۰. فرض کنید $A(\bar{x})$ فرمولی است که دقیقاً دارای متغیرهای آزاد $\bar{x}$ باشد. بستار عمومی^۱ این فرمول، جمله‌ای است به شکل $\forall \bar{x} A(\bar{x})$.

واضح است که بستار عمومی یک جمله خود همان جمله است.

^۱universal closure

نتیجه ۳-۳-۱. برای هر فرمول $\mathcal{A}(\bar{x})$ که دقیقاً دارای متغیرهای آزاد $\bar{x}$ است و به ازای هر ساختار $\mathfrak{M}$ داریم

$$\mathfrak{M} \models \mathcal{A}(\bar{x}) \iff \mathfrak{M} \models \forall \bar{x} \mathcal{A}(\bar{x}).$$

■

برهان. مستقیماً از گزاره ۱-۳-۲۹ نتیجه می‌شود.

۴-۱ ویژگی‌های صدق

گزاره ۱-۴-۱ (حفظ صدق توسط قاعده وضع مقدم).

زبان $\mathcal{L}$ ، فرمول‌های A و B و ساختار $\mathcal{M}$ مفروضند. در این صورت، اگر داشته باشیم $\mathcal{M} \models A$ و $\mathcal{M} \models A \rightarrow B$ ، آنگاه خواهیم داشت $\mathcal{M} \models B$.

برهان. فرض کنید v دنباله ارزشی به توی M باشد، بنابر فرض و تعریف ۱-۳-۲۲، داریم $\mathcal{M} \models_v A \rightarrow B$. رابطه اخیر، بنا بر تعریف ۱-۳-۱، به این معنی است که یا $\mathcal{M} \models_v \neg A$ یا $\mathcal{M} \models_v B$. از طرفی، بنابر فرض داریم $\mathcal{M} \models A$ که بنابر تعریف ۱-۳-۲۲ به این معنی است که به ازای هر v داریم $\mathcal{M} \models_v A$. در نتیجه، به ازای هر v خواهیم داشت $\mathcal{M} \models_v B$ و بنابر تعریف ۱-۳-۲۲ خواهیم داشت

$$\mathcal{M} \models B.$$

■

گزاره ۲-۴-۱. فرمولی به شکل $A \rightarrow B$ در ساختاری مانند $\mathcal{M}$ برآورده شدنی نیست اگر و تنها اگر $\mathcal{M} \models A$ و $\mathcal{M} \not\models B$.

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنید $\mathcal{M} \not\models A \rightarrow B$ ، طبق تعریف ۱-۳-۲۲ دنباله ارزشی مانند v هست که برای آن داریم $\mathcal{M} \not\models_v A \rightarrow B$. در نتیجه، برای چنین دنباله ارزشی، بنابر تعریف صدق تارسکی، خواهیم داشت $\mathcal{M} \models_v A \rightarrow B$ که با فرض برآورده نشدنی بودن $A \rightarrow B$ در تناقض است. به علاوه، در صورتی که داشته باشیم $\mathcal{M} \not\models_v B$ ، بنا بر گزاره ۱-۳-۲۵، دنباله ارزشی مانند v هست که برای آن داریم $\mathcal{M} \models_v B$. طبق تعریف صدق تارسکی، خواهیم داشت $\mathcal{M} \models_v A \rightarrow B$ که مجدداً با فرض برآورده نشدنی بودن $A \rightarrow B$ در تناقض است. ($\Rightarrow$) در صورتی که $A \rightarrow B$ با دنباله ارزشی مانند v برآورده شود، بنابر تعریف صدق تارسکی، خواهیم داشت $\mathcal{M} \models_v A \rightarrow B$ یا $\mathcal{M} \models_v \neg A$ ؛ در هر دو صورت با فرض به تناقض می‌رسیم. ■

تعریف ۱-۴-۳. منظور از نمونه^۱ ای از یک فرمول خوش ساخت گزاره‌ای، فرمولی مرتبه اول است که از جایگزینی فرمول‌هایی مرتبه اول به جای گزاره‌های اتمی آن فرمول گزاره‌ای به نحوی به دست آمده باشد که در آن هر گزاره اتمی تنها با یک فرمول مرتبه اول جایگزین شده باشد.

مثلاً اگر $p \wedge q \rightarrow p$ فرمولی گزاره‌ای باشد، فرمول زیر نمونه‌ای از آن است:

$$\exists x A(x) \wedge R(x, y) \rightarrow \exists x A(x).$$

^۱instance

اما فرمول زیر نمونه ای از آن نیست، زیرا به جای p دو فرمول متمایز قرار داده شده است:

$$A(x) \wedge R(x, y) \rightarrow \exists z R(x, f(z)).$$

هرچند، فرمول فوق نمونه‌ای از فرمولی گزاره‌ای به شکل $p \wedge q \rightarrow r$ هست.

تعریف ۴-۴-۱. فرمول $A(\bar{x})$ در زبان $\mathcal{L}_{fo}$ را منطقاً معتبر^۱ می‌نامیم هرگاه در هر ساختاری مانند $\mathfrak{M}$ درست باشد.

قضیه ۵-۴-۱ (اعتبار منطقی توتولوژی‌ها).

هر نمونه از توتولوژی‌های منطق گزاره‌ها منطقاً معتبر است.

برهان. قضیه تمامیت برای منطق گزاره‌ها به ما می‌گوید که هر توتولوژی دارای اثباتی متناهی است. پس کفایت نشان دهیم که هر نمونه از اصول موضوعه منطق گزاره‌ها در هر ساختاری مانند $\mathfrak{M}$ درست هستند؛ علت این است که با استفاده از گزاره ۱-۴-۱ می‌دانیم که قاعده MP نیز صدق در هر ساختاری را حفظ می‌کند.

اثبات اینکه هر نمونه از اصول موضوعه منطق گزاره‌ها در هر ساختاری درست هستند با استفاده مستقیم از تعریف صدق تارسکی حاصل می‌شود. ما این کار را تنها برای اصل اول که نمونه‌ای دلخواه از آن به شکل زیر است انجام می‌دهیم:

$$A(\bar{x}) \rightarrow (B(\bar{y}) \rightarrow A(\bar{x})),$$

که در آن $A(\bar{x})$ و $B(\bar{y})$ فرمول‌های مرتبه اول دلخواهی هستند.

اگر $\mathfrak{M}$ ساختار دلخواهی باشد، به ازای دنباله ارزشی مانند v ، طبق تعریف صدق تارسکی، فرمول فوق در $\mathfrak{M}$ درست است اگر و تنها اگر داشته باشیم $\mathfrak{M} \models_v \neg A(\bar{x})$ یا داشته باشیم $\mathfrak{M} \models_v A(\bar{x})$ مجدداً با استفاده از تعریف صدق تارسکی، عبارت دوم زمانی برقرار است که داشته باشیم $\mathfrak{M} \models_v \neg B(\bar{y})$ یا $\mathfrak{M} \models_v A(\bar{x})$. از طرفی، در هر ساختار $\mathfrak{M}$ و برای هر دنباله ارزش v داریم

$$\mathfrak{M} \models_v A(\bar{x}) \quad \text{یا} \quad \mathfrak{M} \models_v \neg A(\bar{x}).$$

بنابراین، همواره یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

$$\mathfrak{M} \models_v \neg A(\bar{x}) \quad \text{یا} \quad \mathfrak{M} \models_v B(\bar{y}) \rightarrow A(\bar{x}).$$

■

تعریف ۶-۴-۱. فرمول $A(x_{i_1})$ را در نظر بگیرید. در صورتی که ما ترم t_1 را در این فرمول به جای

^۱logically valid

هر وقوع آزادی از متغیر x_{i_1} ، اگر چنین وقوعی وجود داشته باشد، جایگزین کنیم فرمول حاصل را با $A(t_1)$ نمایش می‌دهیم. طبیعتاً زمانی که $A(x_{i_1})$ شامل هیچ وقوع آزادی از x_{i_1} نباشد، $A(t_1)$ با $A(x_{i_1})$ تفاوتی ندارد.

در حالت کلی‌تر نیز، می‌توان به نحو مشابه حاصل جایگزینی ترم‌های $t_1, \dots, t_n$ به ترتیب به جای متغیرهای $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ را در فرمولی مانند $A(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ تعریف کرد؛ فرمول حاصل را با $A(t_1, \dots, t_n)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱-۴-۷. فرض کنید $A(x_1, x_2)$ فرمولی به شکل زیر باشد

$$\exists x_1 A(x_1) \rightarrow \forall x_1 P(x_1, x_2).$$

اگر t_1 و t_2 به ترتیب ترم‌هایی به شکل $f(a, x_2)$ و $g(a, x_1)$ باشند، آنگاه فرمول $A(t_1, t_2)$ به شکل زیر خواهد بود:

$$\exists x_1 A(x_1) \rightarrow \forall x_1 P(x_1, g(a, x_1)).$$

تعریف ۱-۴-۸. فرمول A و ترم t را در نظر بگیرید. می‌گوییم t در A به جای متغیر x_i آزاد^۱ است هرگاه به ازای هر متغیری مانند x_j که در t ظاهر شده است، هیچ وقوع آزادی از x_i در A نباشد که در دامنه سوری مانند $\forall x_j$ یا $\exists x_j$ قرار بگیرد.

مثال ۱-۴-۹.

(۱) ترم x_1 در فرمول $A(x_1, x_2)$ به جای x_2 آزاد است. اما به جای x_2 در $\exists x_1 A(x_1, x_2)$ آزاد نیست.

(۲) ترم $f(x, y)$ به جای x در $\exists x(R(z, x) \rightarrow P(y))$ آزاد است اما به جای z یا y در همان فرمول آزاد نیست.

گزاره ۱-۴-۱۰.

(۱) هر ترمی که متغیری ندارد به جای هر متغیری در هر فرمولی آزاد است.

(۲) اگر هیچ کدام از متغیرهای موجود در t در فرمولی مانند A بسته نباشند، آن ترم به جای هر متغیری در A آزاد است.

(۳) هر متغیری مانند x_i در هر فرمولی به جای خودش آزاد است.

(۴) اگر فرمولی مانند A حاوی هیچ حضور آزادی از متغیری مانند x_i نبود، هر ترمی به جای x_i در A آزاد است.

^۱ t is free for x_i in A

برهان. به سادگی از تعریف نتیجه می‌شود. ■

لم بعد علی‌رغم صورت طولانی که دارد در صدد بیان واقعیتی ساده است. این واقعیت در مشاهده زیر به شکلی ملموس دیده می‌شود:

مشاهده ۱-۴-۱۱. فرض کنید t ترمی به شکل $f(x_1, g(x_2))$ و u ترمی به شکل $g(g(x_3))$ باشد و v دنباله ارزشی است به توی ساختاری با جهان سخن اعداد طبیعی که در آن f با جمع و g با تابعی تعبیر شده است که هر عدد را به توان ۵ می‌رساند. همچنین، v را دنباله ارزشی در نظر بگیرید که هر متغیر را به زیرنویسش نظیر می‌کند؛ یعنی، به ازای هر i داریم $v(x_i) = i$. حال، با مد نظر قرار دادن متغیر x_1 ، روی این داده‌ها عملیات مخصوصی را انجام می‌دهیم. ابتدا، ترم t' را با جایگزینی u در t به جای x_1 تعریف می‌کنیم که به شکل زیر خواهد شد:

$$f(g(g(x_3)), g(x_2)).$$

سپس، با استفاده از توسیع v می‌توانیم مقدار t' را در ساختارمان پیدا کنیم:

$$v^*(t') = 325 + 25.$$

اما، این عملیات را می‌توانستیم از مسیر دیگری نیز طی کنیم؛ به این شکل که، ابتدا دنباله ارزشی مانند v' به نحوی تعریف می‌کنیم که همه جا شبیه به v است مگر در x_1 که مساوی با $v^*(u)$ تعریف می‌شود:

$$v'(x_1) := v^*(u) = 325.$$

سپس، ما مقدار t را با استفاده از v' محاسبه می‌کنیم:

$$(v')^*(t) = v'(x_1) + 25 = 325 + 25.$$

همانطور که در مشاهده بالا دیدیم، هر دو مسیر طی شده به مقادیر یکسانی ختم شدند. اما در حالت کلی، ترم‌ها و دنباله‌های ارزش می‌توانند بسیار پیچیده‌تر شوند. به همین دلیل ما برای اینکه بتوانیم پدیده‌ای که در این مشاهده دیدیم را در حالت کلی اثبات کنیم، نیاز به لم زیر داریم که با استقراء روی ترم‌ها اثبات می‌شود:

لم ۱-۴-۱۲. فرض کنید v یک دنباله ارزش و t و u دو ترم دلخواه باشند. همچنین، فرض کنید که t' ترمی باشد که از t با جایگزینی u به جای همه وقوع‌های x_i بدست آمده باشد و v' دنباله ارزشی است که همه جا شبیه به v است مگر در x_i که مساوی با $v^*(u)$ تعریف شده است. در این صورت، داریم

$$v^*(t') = (v')^*(t).$$

برهان. در صورتی که x_i در t ظاهر نشده باشد، خواهیم داشت $t' = t$. از طرفی، بنا بر لم ۱-۳-۲ خواهیم داشت $(v')^*(t) = v^*(t)$ که نتیجه می‌دهد

$$v^*(t') = v^*(t) = (v')^*(t).$$

بنابراین، فرض می‌کنیم که x_i در t ظاهر شده است و اثبات را با استقراء را روی t ادامه می‌دهیم. [دقت کنید، به این علت که فرض کردیم x_i در t ظاهر شده است، در استقرائی که استفاده می‌کنیم، نیازی به در نظر گرفتن قدمی برای ثوابت نداریم.]
قدم اول. t همان متغیر x_i باشد. در این صورت t' همان u خواهد بود و خواهیم داشت

$$v^*(t') = v^*(u) = v'(x_i) = (v')^*(t).$$

قدم دوم. t به شکل $f(t_1, \dots, t_n)$ باشد که حکم را درباره $t_1, \dots, t_n$ می‌دانیم. این صورت، t' به شکل $f(t'_1, \dots, t'_n)$ خواهد بود. اگر v دنباله ارزشی به توی ساختاری مانند $\mathcal{M}$ باشد، خواهیم داشت:

$$v^*(t') = f^{\mathcal{M}}(v^*(t'_1), \dots, v^*(t'_n)) = f^{\mathcal{M}}((v')^*(t_1), \dots, (v')^*(t_n)) = (v')^*(t).$$

■

لم ۱-۴-۱۳. فرض کنید t به جای x_i در $A(x_i)$ آزاد باشد و ساختاری مانند $\mathcal{M}$ را در نظر بگیرید. در این صورت دنباله ارزشی مانند v فرمول $A(t)$ را برآورده می‌کند اگر و تنها اگر دنباله v' که به شکل زیر تعریف می‌شود، $A(x_i)$ را برآورده کند. به ازای هر $j \in \omega$

$$v'(x_j) := \begin{cases} v(x_j), & x_j \neq x_i \\ v^*(t), & x_j = x_i \end{cases}$$

برهان. در صورتی که $A(x_i)$ شامل وقوع آزادی از متغیر x_i نباشد، طبق تعریف ۱-۴-۶ فرمول $A(t)$ همان $A(x_i)$ خواهد بود. در نتیجه، بنابر گزاره ۱-۳-۳، خواهیم داشت

$$\mathcal{M} \models_v A(t) \iff \mathcal{M} \models_{v'} A(x_i).$$

بنابراین، فرض می‌کنیم $A(x_i)$ شامل وقوع آزادی از x_i باشد و اثبات را با استقراء روی فرمول‌ها ادامه می‌دهیم.

قدم اول. در صورتی که $A(x_i)$ فرمولی اتمی به شکل $A(t_1, \dots, t_n)$ باشد و $t'_1, \dots, t'_n$ از جایگزینی t به جای x_i در ترم‌های $t_1, \dots, t_n$ بدست آمده باشند. در این صورت، حاصل جایگزینی t به جای x_i در $A(x_i)$ فرمولی به شکل $A(t'_1, \dots, t'_n)$ خواهد بود. از طرفی، بنابر لم ۱-۴-۱۲،

به ازای هر $j \in \{1, \dots, n\}$ خواهیم داشت

$$v^*(t'_j) = (v')^*(t_j). \quad (۱۶-۴-۱)$$

بنابراین، داریم $\mathcal{M} \models_v A(t)$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M} \models_v A(t'_1, \dots, t'_n)$. عبارت اخیر، بنابر تعریف صدق تارسکی، معادل با این است که

$$(v^*(t'_1), \dots, v^*(t'_n)) \in A^{\mathcal{M}}.$$

بنابر معادله (۱۶-۴-۱)، عبارت اخیر معادل است با

$$((v')^*(t_1), \dots, (v')^*(t_n)) \in A^{\mathcal{M}},$$

که بنابر تعریف صدق تارسکی معادل است با $\mathcal{M} \models_{v'} A(t_1, \dots, t_n)$ که همان $\mathcal{M} \models_{v'} A(x_i)$ است.

قدم دوم. اگر $A(x_i)$ به شکل $B(x_i) \rightarrow C(x_i)$ باشد که حکم را درباره $B(x_i)$ و $C(x_i)$ می‌دانیم. در این صورت، $A(t)$ نیز به شکل $B(t) \rightarrow C(t)$ خواهد بود و خواهیم داشت

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \models_v A(t) & \iff & \mathcal{M} \models_v B(t) \rightarrow C(t) \\ & \iff \text{صدق تارسکی} & \mathcal{M} \models_v \neg B(t) \quad \text{یا} \quad \mathcal{M} \models_v C(t) \\ & \iff \text{فرض استقراء} & \mathcal{M} \models_{v'} \neg B(x_i) \quad \text{یا} \quad \mathcal{M} \models_{v'} C(x_i) \\ & \iff \text{صدق تارسکی} & \mathcal{M} \models_{v'} B(x_i) \rightarrow C(x_i) \\ & \iff & \mathcal{M} \models_{v'} A(x_i). \end{array}$$

قدم‌های مربوط به رابط‌های منطقی $\vee$ ، $\wedge$ و $\leftrightarrow$ شبیه به قدم دوم هستند.

قدم سوم. $A(x_i)$ به شکل $\forall x_j B(x_i, x_j)$ باشد. در صورتی که $x_i = x_j$ ، آنگاه x_i وقوع آزادی در $A(x_i)$ نخواهد داشت و این همان حالتی است که قبل از شروع استقراء آن را بررسی کردیم. بنابراین، فرض می‌کنیم که $x_i \neq x_j$ ؛ در این صورت وقوع‌های آزاد x_i در $A(x_i)$ دقیقاً همان وقوع‌های آزاد x_i در $B(x_i, x_j)$ خواهند بود و در نتیجه $A(t)$ به شکل $\forall x_j B(t, x_j)$ خواهد بود. فرض کنیم $\mathcal{M} \models_v A(t)$ که به معنی $\mathcal{M} \models_v \forall x_j B(t, x_j)$ خواهد بود. این مطلب، بنابر تعریف صدق تارسکی، نتیجه می‌دهد که به ازای هر w که j -هم‌ارز با v است داریم $\mathcal{M} \models_w B(t, x_j)$. می‌خواهیم نشان دهیم که $\mathcal{M} \models_{v'} \forall x_j B(x_i, x_j)$. اگر w' دنباله ارزشی j -هم‌ارز با v' باشد، بنابر تعریف v' و به این علت که $i \neq j$ است، برای هر $l \in \omega \setminus \{i, j\}$ خواهیم داشت

$$w'(x_l) = v(x_l),$$

به علاوه می‌دانیم که

$$w'(x_i) = v'(x_i) = v^*(t).$$

بنابراین، اگر w را دنباله ارزشی بگیریم که همه‌جا مساوی با w' است مگر در x_i که مساوی با $v(x_i)$ تعریف می‌شود، این دنباله j -هم‌ارز با v خواهد بود که بنا بر فرض نتیجه می‌دهد

$$\mathfrak{M} \models_w B(t, x_j).$$

حال، اگر w'' را دنباله ارزشی به شکل زیر تعریف کنیم

$$w''(x_l) := \begin{cases} w^*(t), & l = i, \\ w(x_l), & l \neq i, \end{cases}$$

بنا بر فرض استقراء داریم که

$$\mathfrak{M} \models_w B(t, x_j) \iff \mathfrak{M} \models_{w''} B(x_i, x_j). \quad (17-4-1)$$

از طرفی بنا بر فرض، t به جای x_i در A آزاد است. پس x_j نمی‌تواند در t حضور داشته باشد. همچنین، v و w با هم j -هم‌ارز هستند. پس چون x_j در t حضور ندارد، بنا بر لم ۱-۳-۲ خواهیم داشت:

$$w^*(t) = v^*(t).$$

در نتیجه، خواهیم داشت $w'' = w'$ و بنا بر معادله (۱۷-۴-۱) داریم

$$\mathfrak{M} \models_{w'} B(x_i, x_j),$$

که نتیجه می‌دهد $\mathfrak{M} \models_{v'} A(x_i)$. با استدلال مشابهی می‌توانیم از $\mathfrak{M} \models_{v'} A(x_i)$ نتیجه بگیریم $\mathfrak{M} \models_v A(t)$ که اثبات را کامل می‌کند. ■

گزاره ۱-۴-۱۴ (اعتبار منطقی اصل تخصیص).

به ازای هر فرمول مانند $A(x_i)$ و هر ترمی مانند t که به جای x_i در $A(x_i)$ آزاد باشد، فرمول زیر منطقاً معتبر است:

$$\forall x_i A(x_i) \rightarrow A(t).$$

برهان. باید به ازای هر تعبیر مانند $\mathfrak{M}$ و هر دنباله ارزش مانند v ، نشان دهیم که

$$\mathfrak{M} \models_v \forall x_i A(x_i) \rightarrow A(t).$$

در صورتی که v' را دنباله ارزشی به شکل زیر در نظر بگیریم

$$v'(x_l) := \begin{cases} v^*(t), & l = i, \\ v(x_l), & l \neq i, \end{cases}$$

بنا بر لم ۱-۴-۱۳ خواهیم داشت

$$\mathfrak{M} \models_v \mathcal{A}(t) \iff \mathfrak{M} \models_{v'} \mathcal{A}(x_i). \quad (۱۸-۴-۱)$$

اما v' ، به علاوه، i -هم‌ارز با v نیز هست. پس اگر فرض کنیم $\mathfrak{M} \models_v \forall x_i \mathcal{A}(x_i)$ ، بنا بر تعریف صدق تارسکی، خواهیم داشت

$$\mathfrak{M} \models_{v'} \mathcal{A}(x_i),$$

که بنا بر معادله (۱۸-۴-۱) نتیجه می‌دهد

$$\mathfrak{M} \models_v \mathcal{A}(t).$$

بنا بر تعریف صدق تارسکی خواهیم داشت

$$\mathfrak{M} \models_v \forall x_i \mathcal{A}(x_i) \rightarrow \mathcal{A}(t).$$

■

گزاره ۱-۴-۱۵. به ازای هر دو فرمول $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ اگر $\mathcal{A}$ شامل وقوع آزادی از x_i نباشد، آنگاه فرمول زیر منطقاً معتبر است:

$$\forall x_i (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{B}).$$

برهان. در صورتی که این فرمول منطقاً معتبر نباشد، تعبیری مانند $\mathfrak{M}$ و دنباله ارزشی مانند v وجود دارند که برای آنها داریم

$$\mathfrak{M} \models_v \forall x_i (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}), \quad (۱۹-۴-۱)$$

اما $\mathfrak{M} \not\models_v \mathcal{A} \rightarrow \forall x_i \mathcal{B}$. عبارت اخیر، بنا بر تعریف صدق تارسکی، نتیجه می‌دهد که

$$\mathfrak{M} \models_v \mathcal{A} \quad (۲۰-۴-۱)$$

و $\mathfrak{M} \not\models_v \forall x_i \mathcal{B}$. بنا بر تعریف صدق تارسکی، دنباله‌ای مانند w که i -هم‌ارز با v است وجود دارد که برای آن داریم $\mathfrak{M} \not\models_w \mathcal{B}$.

حال، به این علت که x_i نه در A و نه در $\forall x_i(A \rightarrow B)$ حضور آزادی ندارد، بنا بر گزاره ۳-۱ و ۳-۱ با توجه به معادلات (۱-۴-۱۹) و (۱-۴-۲۰) خواهیم داشت

$$\mathcal{M} \models_w A \quad \text{و} \quad \mathcal{M} \models_w \forall x_i(A \rightarrow B).$$

پس، بنا بر تعریف صدق تارسکی داریم $\mathcal{M} \models_w A \rightarrow B$ که نتیجه می‌دهد $\mathcal{M} \models_w B$ ؛ و این یک تناقض است. ■

قبل از ورود به بخش بعد، ما چند تعریف دیگر در ارتباط با مفهوم صدق ارائه می‌دهیم. در بخش‌های آینده و به مرور به این تعاریف باز خواهیم گشت و مثال‌های مختلفی از آنها خواهیم دید.

تعریف ۱-۴-۱۶.

(۱) مجموعه Γ از فرمول‌ها را برآورده شدنی^۱ می‌نامیم هرگاه ساختاری مانند $\mathcal{M}$ و دنباله ارزشی مانند v به نحوی پیدا شوند که همه فرمول‌های Γ را به شکل همزمان برآورده کنند. یعنی به ازای هر $A(\bar{x}) \in \Gamma$ داشته باشیم

$$\mathcal{M} \models_v A(\bar{x}).$$

در چنین وضعیتی می‌نویسیم $\mathcal{M} \models_v \Gamma$ و می‌گوییم $\mathcal{M}$ و v مدلی برای Γ است.

(۲) فرمول $A(\bar{x})$ را نتیجه منطقی^۲ مجموعه فرمول‌های Γ می‌نامیم هرگاه $A(\bar{x})$ در هر ساختار و دنباله ارزشی که مدلی برای Γ است درست باشد. این مطلب را با نماد زیر نمایش می‌دهیم:

$$\Gamma \models A(\bar{x}).$$

(۳) در صورتی که مجموعه Γ تهی باشد به جای $\emptyset \models A(\bar{x})$ می‌نویسیم

$$\models A(\bar{x}).$$

تذکر ۱-۴-۱۷. قسمت سوم از تعریف بالا معادل با این است که بگوییم $A(\bar{x})$ منطقاً معتبر است. بنابراین، از این به بعد وقتی می‌نویسیم $\models A(\bar{x})$ منظورمان این است که $A(\bar{x})$ فرمولی منطقاً معتبر است.

^۱satisfiable

^۲logical consequence

۵-۱ تمایز بین دو ساختار، هم‌ارزی مقدماتی

سؤال اصلی ما در این بخش این است که بدانیم منطق مرتبه اول چه ابزاری برای مقایسه دو ساختار دلخواه مانند $\mathcal{M}$ و $\mathcal{N}$ در اختیار ما می‌گذارد. قبل از آن بهتر است به یاد بیاوریم که اساساً منطق مرتبه اول شامل چه چیزهایی است که می‌خواهیم از آن برای مقایسه ساختارهای ریاضی استفاده کنیم. تا این لحظه، منطق مرتبه اول اساساً از «فرمول‌ها»، «جملات» و «مفهوم صدق» تشکیل شده است. بنابراین، اولین چیزی که به ذهن می‌رسد این است که آنچه دو ساختار را از دیدگاه منطق مرتبه اول متمایز می‌کند به این مطلب بر می‌گردد که چه فرمول‌ها و جملاتی در آن‌ها صادق یا کاذبند.

اگر زبان این دو ساختار با هم متفاوت باشد مسئله مقایسه این دو ساختار می‌تواند بسیار پیچیده شود. مثلاً فرض کنید $\mathcal{M}$ در زبانی است که دارای تنها یک نماد محمولی مانند P است و زبان $\mathcal{N}$ دارای تنها یک نماد تابعی مانند f باشد. اولین کاری که برای مقایسه این دو ساختار باید انجام دهیم این است که بدانیم آیا می‌توان در $\mathcal{M}$ فرمولی پیدا کرد که یک تابع را به نحوی تعریف کند که رفتاری شبیه به f در $\mathcal{N}$ داشته باشد. یا بر عکس آیا می‌توان در $\mathcal{N}$ محمولی تعریف‌پذیر یافت که رفتاری شبیه به P در $\mathcal{M}$ داشته باشد. مطالعه چنین وضعیتی به مفهومی به نام «تعبیرپذیری^۱» و «تعبیرپذیری دوسویه^۲» می‌انجامد که خارج از حوزه این درس است و جایگاهش در درسی پیشرفته‌تر در منطق یا نظریه مدل‌ها ست.

بنابراین، ما تنها وضعیت‌هایی را بررسی می‌کنیم که دو ساختار مورد مقایسه در یک زبان باشند. به علاوه، به این دلیل که در اکثر قریب به اتفاق ساختارهایی که در ریاضیات با آنها سر و کار داریم، محمول تساوی ظاهر می‌شود، قرارداد زیر را دست کم تا پایان این بخش وضع می‌کنیم:

قرارداد ۱-۵-۱. در این بخش، در هر زبانی مانند $\mathcal{L}$ که بررسی می‌کنیم، وجود یک محمول دو موضعی را فرض می‌گیریم که در هر $\mathcal{L}$ -ساختاری با «تساوی» تعبیر می‌شود؛ بنابراین، از این به بعد به این محمول و تعبیرش صراحتاً اشاره‌ای نمی‌کنیم و آزادانه از نماد «=» در فرمول‌ها استفاده خواهیم کرد.

تا کنون، ما زبانی مانند $\mathcal{L}$ را در نظر می‌گرفتیم و به شکلی دلخواه تعبیری ارائه می‌دادیم که نتیجه آن داشتن $\mathcal{L}$ -ساختی جدید بود؛ در واقع، برای این کار هیچ محدودیتی نداشتیم. اما، فرض کنید در زبانی مانند $\mathcal{L}$ به دنبال یافتن ساختارهایی هستیم که ویژگی یا ویژگی‌های مشخصی داشته باشند. به عنوان مثال، فرض کنید می‌خواهیم ساختارهایی را پیدا کنیم که حداقل ۵ عضو دارند. برای این کار می‌توانیم جمله‌ای مانند λ_5 را به شکل زیر تعریف کنیم

$$\exists x_1 \cdots x_5 \bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i, j = 1}}^5 x_i \neq x_j.$$

^۱interpretability

^۲bi-interpretability

در این صورت، ما عملاً به دنبال همه $\mathcal{L}$ -ساختارهایی مانند $\mathfrak{M}$ هستیم که برای آن‌ها داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \lambda_5.$$

یا اگر بخواهیم همه ساختارهایی را بیابیم که حداکثر ۹ عضو دارند، می‌توانیم جمله‌ای مانند μ_9 را به شکل زیر تعریف کنیم

$$\exists x_1 \dots x_9 \forall y \left(\bigvee_{i=1}^9 y = x_i \right).$$

که مجدداً، سؤال ما به یافتن همه $\mathcal{L}$ -ساختارهایی مانند $\mathfrak{M}$ تبدیل می‌شود که برای آن‌ها داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \mu_9.$$

حال، فرض کنید زبان $\mathcal{L}$ علاوه بر تساوی دارای محمول دو موضعی دیگری مانند $R(x, y)$ باشد. بر اساس مثال‌هایی که تا کنون دیده‌ایم، یک $\mathcal{L}$ -ساختار می‌تواند یک گراف ساده، یک گراف جهت‌دار، یک گراف بدون طوق، یک درخت، یک ترتیب جزئی، یک ترتیب خطی و یا بسیاری چیزهای دیگر باشد.

در صورتی که بخواهیم $\mathcal{L}$ -ساختارهایی را بیابیم که ترتیبی جزئی دارند می‌توانیم جملاتی را به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{ir}} : & \quad \forall x \neg R(x, x) \\ \varphi_{\text{tr}} : & \quad \forall xyz (R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z)). \end{aligned}$$

حال، یک $\mathcal{L}$ -ساخت مانند $\mathfrak{M}$ ترتیبی جزئی است اگر و تنها اگر

$$\mathfrak{M} \models \{\varphi_{\text{ir}}, \varphi_{\text{tr}}\}.$$

اگر جمله‌ی زیر را هم در نظر بگیریم که بیان می‌کند همه عناصر با هم از طریق R مقایسه‌پذیرند

$$\varphi_{\text{lin}} : \quad \forall xy (x = y \vee R(x, y) \vee R(y, x)),$$

می‌توانیم با در نظر گرفتن مجموعه زیر از جملات

$$T_{\text{lo}} := \{\varphi_{\text{ir}}, \varphi_{\text{tr}}, \varphi_{\text{lin}}\},$$

که آنرا با T_{lo} مشخص کرده‌ایم، به این نتیجه برسیم که ساختاری مانند $\mathfrak{M}$ یک ترتیب خطی است

اگر و تنها اگر

$$\mathcal{M} \models T_{lo}.$$

حتی بیشتر، ما می‌توانیم مجموعه‌ای از جملات را در نظر بگیریم که هر ساختاری که مدل آن باشد ترتیبی خطی با حداقل ۵ عضو و حداکثر ۹ عضو باشد! کفایت مجموعه زیر از جملات را در نظر بگیریم

$$\{\varphi_{ir}, \varphi_{tr}, \varphi_{lin}, \lambda_5, \mu_9\}.$$

تمرین ۱-۵-۲. در زبان $\mathcal{L} = \{R^2\}$:

(۱) مجموعه‌ای از جملات مانند T_n را بنویسید که برای هر ساختاری مانند $\mathcal{M}$ داشته باشیم $\mathcal{M} \models T_n$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M}$ دارای دقیقاً n عضو باشد.

(۲) مجموعه‌ای از جملات مانند T_{sg} بنویسید که برای هر ساختاری مانند $\mathcal{M}$ داشته باشیم $\mathcal{M} \models T_{sg}$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M}$ گراف ساده و بدون طوقی باشد. (منظور از گراف ساده، گراف بدون جهت است؛ یعنی رابطه‌ی یال داشتن در آن تقارنی است).

(۳) مجموعه‌ای از جملات مانند T_3 بنویسید که برای هر ساختاری مانند $\mathcal{M}$ داشته باشیم $\mathcal{M} \models T_3$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M}$ گرافی ساده و بدون طوقی باشد که در آن هیچ دوری با طول ۳ وجود ندارد.

(۴) مجموعه‌ای از جملات مانند T_4 بنویسید که برای هر ساختاری مانند $\mathcal{M}$ داشته باشیم $\mathcal{M} \models T_4$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M}$ گرافی ساده و بدون طوقی باشد که در آن هیچ مسیری با طول ۴ وجود ندارد.

(۵) مجموعه‌ای از جملات مانند T_5 بنویسید که برای هر ساختاری مانند $\mathcal{M}$ داشته باشیم $\mathcal{M} \models T_5$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M}$ گرافی ساده و بدون طوقی باشد که درجه هر رأس حداقل ۵ باشد.

(۶) نشان دهید جمله φ_{as} که خاصیت پادتقارنی^۱ بودن را بیان می‌کند نتیجه منطقی T_{po} است:

$$\varphi_{as} : \quad \forall xy(R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x)).$$

منظور از T_{po} نظریه ترتیب‌های جزئی است که متشکل از دو جمله φ_{ir} و φ_{tr} است.

همان‌طور که در مثال‌ها و تمرین‌های بالا می‌بینیم، وقتی مجموعه‌ای از جملات مرتبه اول در کنار هم قرار می‌گیرند می‌توانند ویژگی‌های معناداری را بیان کنند.

تعریف ۱-۵-۳.

^۱anti symmetric

(۱) منظور از یک نظریه مرتبه اول^۲ مجموعه‌ای از فرمول‌های مرتبه اول است که در کنار هم قرار می‌گیرند.

(۲) در صورتی که همه فرمول‌های نظریه‌ای مانند T در ساختاری مانند $\mathcal{M}$ به طور همزمان برآورده شوند، $\mathcal{M}$ را مدلی از نظریه T می‌نامیم.

(۳) فرمول φ را با نظریه T به لحاظ معنایی سازگار^۱ نامیم هرگاه $\neg\varphi$ نتیجه منطقی T نباشد؛ یعنی

$$T \not\models \neg\varphi.$$

(۴) فرمول φ را از نظریه T به لحاظ معنایی مستقل^۲ نامیم هرگاه φ نتیجه منطقی T نباشد؛ یعنی

$$T \not\models \varphi.$$

گزاره ۱-۵-۴. فرمول φ و نظریه T مفروضند.

(۱) φ از T به لحاظ معنایی مستقل است اگر و تنها اگر نظریه $T \cup \{\neg\varphi\}$ دارای مدلی باشد.

(۲) φ با T به لحاظ معنایی سازگار است اگر و تنها اگر نظریه $T \cup \{\varphi\}$ دارای مدلی باشد.

(۳) φ از T مستقل است اگر و تنها اگر $\neg\varphi$ با T سازگار باشد.

برهان. (۱) در صورتی که φ از T مستقل باشد، طبق تعریف خواهیم داشت $T \not\models \varphi$. طبق تعریف ۱-۴-۱ ساختاری مانند $\mathcal{M}$ وجود خواهد داشت که برای آن داریم $\mathcal{M} \models T$ اما $\mathcal{M} \not\models \varphi$. بنابر گزاره ۱-۳-۲۵ خواهیم داشت $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ و این همان چیزی است که می‌خواستیم. عکس مطلب هم مشابهاً بدست می‌آید.

(۲) فرض کنید φ با T به لحاظ معنایی سازگار باشد، طبق تعریف داریم $T \not\models \neg\varphi$. طبق تعریف ۱-۴-۱ ساختاری مانند $\mathcal{M}$ وجود خواهد داشت که برای آن داریم $\mathcal{M} \models T$ اما $\mathcal{M} \not\models \neg\varphi$. بنابر گزاره ۱-۳-۲۵ خواهیم داشت $\mathcal{M} \models \varphi$. عکس مطلب هم با استدلال مشابهی بدست می‌آید.

(۳) مستقیماً از قسمت‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود. ■

مثال ۱-۵-۵. نظریه ترتیب‌های خطی، T_{lo} ، را در نظر بگیرید. خاصیت چگال بودن^۳ که با جمله زیر بیان می‌شود از T_{lo} مستقل است:

$$\varphi_{\text{dense}} : \quad \forall xy (R(x, y) \rightarrow \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y))).$$

^۲first-order theory

^۲being dense

^۱semantically consistent

^۲semantically independent

علت این است که ترتیب‌های خطی وجود دارند که چگال نیستند مانند ساختارهای زیر

$$\mathcal{M}_1 := \langle \mathbb{N}, < \rangle \quad \text{و} \quad \mathcal{M}_2 := \langle \mathbb{Z}, < \rangle.$$

در حالت کلی می‌توان نشان داد که هر ترتیب خطی متناهی غیر چگال است. اما خاصیت چگال بودن با T_{lo} سازگار نیز هست! زیرا ترتیب‌های خطی وجود دارند که چگالند مانند

$$\mathcal{M}_3 := \langle \mathbb{Q}, < \rangle,$$

$$\mathcal{M}_4 := \langle \mathbb{R}, < \rangle,$$

$$\mathcal{M}_5 := \langle [\circ, 1], < \rangle.$$

در مثال بالا، نظریه‌ای را دیدیم مانند T_{lo} که برای آن فرمولی مانند φ_{dense} هست که هم با آن سازگار و هم از آن مستقل است؛ یعنی، نه $\neg\varphi_{dense}$ و نه φ_{dense} نتیجه منطقی T_{lo} نیستند. از دیدگاه منطقی مفید و بسیار مهم است که بین نظریه‌هایی که برایشان چنین فرمول‌هایی وجود دارد و نظریه‌هایی که اینگونه نیستند تمایز قائل شویم:

تعریف ۱-۵-۶. نظریه‌ای مرتبه اول مانند T در زبان $\mathcal{L}$ را به لحاظ معنایی کامل یا تمام^۱ می‌گوییم هرگاه به ازای هر $\mathcal{L}$ -جمله مانند φ داشته باشیم $T \models \varphi$ یا $T \models \neg\varphi$. در غیر این صورت آن نظریه را به لحاظ معنایی ناکامل یا ناتمام^۲ می‌نامیم.

به بیان دیگر، برای نظریه‌ای ناتمام همواره فرمول‌هایی وجود دارند که آن نظریه قدرت تمیز بین درستی و غلطی آنها را ندارد. مثلاً، نظریه ترتیب‌های خطی اساساً نمی‌تواند قضاوت کند که چگال بون درست است یا غلط. در حالی که، نظریه‌ای کامل دارای این ویژگی است که هر فرمول دلخواهی که در زبانش انتخاب کنیم، آن نظریه قادر است قضاوتی کامل درباره آن فرمول ارائه دهد.

تمرین ۱-۵-۷.

(۱) نشان دهید که فرمول φ_{lin} از T_{po} مستقل و همچنین با آن سازگار است.

(۲) جمله‌ای در زبان نظریه T_{lo} بنویسید که به معنای وجود عضو بیشین^۳ باشد.

(۳) نشان دهید که وجود عضو بیشین از T_{lo} مستقل و همچنین با آن سازگار است.

(۴) چرا T_{lo} و T_{po} کامل نیستند؟

تعریف ۱-۵-۸.

^۱semantically complete

^۲maximum

^۳semantically incomplete

(۱) برای $\mathcal{L}$ -ساختی مانند $\mathfrak{M}$ ، همه جملاتی را که در $\mathfrak{M}$ صادقند نظریه $\mathfrak{M}$ می‌نامیم و این مجموعه را با $\text{Th}(\mathfrak{M})$ نمایش می‌دهیم.

(۲) دو $\mathcal{L}$ -ساخت $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ را هم‌ارز مقدماتی^۱ می‌نامیم و می‌نویسیم $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$ هرگاه برای هر $\mathcal{L}$ -جمله مانند φ داشته باشیم

$$\mathfrak{M} \models \varphi \iff \mathfrak{N} \models \varphi.$$

به عبارت دیگر $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{N}$ هم‌ارز مقدماتی هستند هرگاه داشته باشیم

$$\text{Th}(\mathfrak{M}) = \text{Th}(\mathfrak{N}).$$

مثال ۱-۵-۹.

(۱) هر دو ساختار متناهی با تعداد اعضای متفاوت هم‌ارز مقدماتی نیستند؛ زیرا می‌توان جمله‌ای نوشت که معنایش وجود دقیقاً n عضو باشد.

(۲) هیچ دو ساختاری از مثال ۱-۳-۱ با هم هم‌ارز مقدماتی نیستند.

$$(۳) \langle \mathbb{N}, < \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Q}, < \rangle.$$

تمرین ۱-۵-۱۰.

$$(۱) \text{ نشان دهید که } \langle \mathbb{N}, < \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Z}, < \rangle.$$

$$(۲) \text{ نشان دهید که } \langle \mathbb{N}, + \rangle \not\equiv \langle \mathbb{Z}, + \rangle.$$

گزاره ۱-۵-۱۱. به ازای هر ساختاری مانند $\mathfrak{M}$ نظریه آن، $\text{Th}(\mathfrak{M})$ ، نظریه‌ای کامل است.

برهان. بنابر نتیجه ۱-۳-۲۰ به ازای هر جمله‌ای مانند φ داریم

$$\mathfrak{M} \models \varphi \quad \text{یا} \quad \mathfrak{M} \models \neg\varphi.$$

در نتیجه، همواره $\varphi \in \text{Th}(\mathfrak{M})$ یا $\neg\varphi \in \text{Th}(\mathfrak{M})$. در نتیجه، واضح است که همواره داریم

$$\text{Th}(\mathfrak{M}) \models \varphi \quad \text{یا} \quad \text{Th}(\mathfrak{M}) \models \neg\varphi.$$

■

^۱elementarily equivalent

۱-۶ دستگاه استنتاج برای منطق مرتبه اول

تذکر ۱-۶-۱. جمله‌ای مانند A منطقاً معتبر است هرگاه به ازای هر ساختاری مانند $\mathcal{M}$ داشته باشیم

$$A \in \text{Th}(\mathcal{M}).$$

یک تفاوت اساسی که بین منطق گزاره‌ها و منطق مرتبه اول وجود دارد این است که برای تشخیص فرمول‌های منطقاً معتبر در منطق گزاره‌ها یک الگوریتم وجود دارد که می‌تواند با استفاده از جداول ارزش تشخیص دهد آیا یک فرمول منطقاً معتبر هست یا نه.

هرچند که بر اساس قضایای صحت و تمامیت می‌دانیم که منطقاً معتبر بودن با اثبات‌پذیر بودن معادل است، شاید آسان‌تر است که در حالت کلی برای تشخیص منطقاً معتبر بودن یک فرمول در منطق گزاره‌ها به جداول ارزش رجوع کنیم و نه به دستگاه‌های استنتاجی مختلفی—و البته معادلی—که برای این منطق وجود دارند. در واقع، دستگاه‌های استنتاجی مختلف برای منطق گزاره‌ها نقشی مهم در یافتن الگوریتم‌های بهینه‌تر برای تعیین برآورده‌شدنی بودن فرمول‌ها ایفا می‌کنند. این مطلب از دیدگاه نظریه محاسبات اهمیتی اساسی دارد زیرا مسئله برآورده‌شدنی بودن فرمول‌ها، که به مسئله SAT معروف است، مسئله‌ای NP^1 —کامل^۲ است.

از طرفی، بنابر نتیجه‌ای که از قضیه ناتمامیت گودل بدست می‌آید، چنین الگوریتمی برای منطق مرتبه اول نمی‌تواند وجود داشته باشد؛ ما بعد از بیان قضیه ناتمامیت گودل این مطلب را اثبات خواهیم کرد. در نتیجه، دستگاه یا دستگاه‌های استنتاجی برای منطق مرتبه اول اهمیتی بیشتر پیدا می‌کنند زیرا، ممکن است برای فرمولی خاص یافتن اثباتی صوری از بررسی این موضوع که آن فرمول در همه ساختارها درست است آسان‌تر باشد. این دو رهیافت، یعنی بررسی معنایی در مقابل بررسی صوری—استنتاجی، علی‌رغم اینکه بنابر قضایای صحت و تمامیت با هم معادل خواهند بود، می‌توانند در یافتن پاسخ برای بعضی مسئله‌ها تفاوتی معنادار با یکدیگر داشته باشند.

اصول موضوعه منطق مرتبه اول شامل همه نمونه‌های اصول موضوعه منطق گزاره‌ها به علاوه دو اصل جدید درباره سور عمومی است. بنابراین، به ازای فرمول‌های دلخواه A ، B و C اصول موضوعه زیر را برای منطق مرتبه اول شبیه به منطق گزاره‌ها وضع می‌کنیم:

$$(A\ ۱) \quad A \rightarrow (B \rightarrow A).$$

$$(A\ ۲) \quad (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)).$$

$$(A\ ۳) \quad (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A).$$

به علاوه، برای هر فرمول $A(x)$ و هر ترم t در صورتی که t به جای x در $A(x)$ آزاد باشد، اصل

^۱Non-deterministic Polynomial

^۲NP-complete

زیر را که به آن «اصل تخصیص» می‌گوییم اضافه می‌کنیم:

$$(A\ 4) \quad \forall x A(x) \rightarrow A(t).$$

همچنین، برای هر دو فرمول A و B در صورتی که x حضوری آزاد در A نداشته باشد، اصل زیر را هم بر اصول پیشین می‌افزاییم:

$$(A\ 5) \quad (\forall x (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B).$$

آنچه می‌ماند تعیین قواعد استنتاج برای منطق مرتبه اول است که اولی قاعده وضع مقدم یا MP شبیه به منطق گزاره‌هاست:

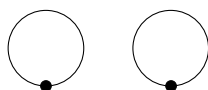
$$\frac{A, A \rightarrow B}{B} \text{ (MP)},$$

و قاعده دیگر به قرار زیر است که آنرا قاعده تعمیم^۱ می‌نامیم:

$$\frac{A}{\forall x A} \text{ (Gen)}$$

در دو مشاهده زیر برایمان مشخص می‌شود که چرا در دو اصل $A4$ و $A5$ شرایط خاصی را درباره متغیرها و ترم‌ها وضع کردیم.

مشاهده ۱-۶-۲. فرض کنید در زبان گراف‌ها ساختاری مانند زیر به نام $\mathcal{M}$ داریم که از دو رأس و دو طوق تشکیل شده است:



$\mathcal{M}$

در این صورت، واضح است که داریم

$$\mathcal{M} \models \forall x \exists y \neg R(x, y).$$

دقت کنید که در فرمول $\exists y \neg R(x, y)$ جایگزینی y به جای x آزاد نیست. حال اگر در $A4$ شرط

^۱Rule of Generalization

آزاد بودن t به جای x را نداشتیم، فرمول زیر نمونه‌ای از آن می‌بود:

$$\forall x \exists y \neg R(x, y) \rightarrow \exists y \neg R(y, y),$$

که بوضوح نمی‌تواند در ساختار $\mathcal{M}$ درست باشد.