

منطق ریاضی جلد ۵

دلیل

شماره ۱.

1. $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ I1
2. $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ I2
3. $\alpha \rightarrow \alpha$ 1, 2, MP.

$$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

۱۳. به ازای هر $\alpha \in \text{FORM}$ ، قریب $\alpha \rightarrow \alpha$ قضیه است. از منطق گزاره‌ها.

$$\boxed{\alpha \rightarrow \alpha} \checkmark$$

$$\vdash \alpha \rightarrow \alpha$$

۱۴. $\alpha, \alpha \rightarrow \beta$ MP

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

$$\boxed{\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta}$$

شماره ۲.

$$1. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \wedge \beta)) \quad \text{I3}$$

2. $\alpha \rightarrow \alpha$ (طبق لم بالا)
3. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \wedge \beta)$ 1, 2, MP

$\Gamma \vdash \gamma$
hypotheses
فروضات

$$4. \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \quad \text{I1}$$

$$5. \beta$$

hyp.

$$6. \alpha \rightarrow \beta$$

4, 5, MP

$$7. \alpha \rightarrow \alpha \wedge \beta$$

3, 6, MP

$$\boxed{\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}} \quad \text{قاعده}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \vdots \\ \alpha \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \beta \end{array} \quad \begin{array}{c} n. \alpha \wedge \beta \\ \vdots \end{array}} \quad \text{قاعده بالا}$$

8. α

hyp.

9. $\alpha \wedge \beta$

7, 8, MP

شماره ۲

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

1. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ I3
2. $\alpha \rightarrow \beta$ hyp.
3. $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ 1, 2, MP
4. $\beta \rightarrow \gamma$ hyp.
5. $\alpha \rightarrow \gamma$ 3, 4, MP.

گزاره ۵: فرض کنیم Γ مجموعه از فرمول‌ها این خاصیت باشد که به ازای فرمول α داشته باشیم

$$\Gamma \vdash \alpha, \Gamma \vdash \neg \alpha$$

در این صورت، به ازای هر $\beta \in \text{FORM}$ خواهیم داشت:

$$\Gamma \vdash \beta$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \stackrel{\geq \alpha}{\vdash} \alpha$$

اجزای متباین به فرمولات Γ

$$: \Gamma \vdash \alpha$$

اثبات ۱

$$\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m \stackrel{\geq \neg \alpha}{\vdash} \neg \alpha$$

$$: \Gamma \vdash \neg \alpha$$

اجزای متباین به فرمولات Γ

$$(1) \dots (n+m+1 = 1). \quad \alpha \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \alpha) \quad \text{I1}$$

⋮

$$(n). \alpha$$

$$(2). \neg \beta \rightarrow \alpha \quad n, 1', \text{MP}$$

$$(3). (\neg \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\neg \alpha \rightarrow \neg \neg \beta) \quad \text{VI}$$

$$(n+1). \dots$$

⋮

$$(4'). \neg \alpha \rightarrow \neg \neg \beta \quad 2', 3', \text{MP}$$

$$(n+m). \neg \alpha$$

$$(5'). \neg \neg \beta \quad n+m, 4', \text{MP}$$

$$(6') \cdot \neg \beta \rightarrow \beta$$

V3

$$(n+m+7=7') \cdot \beta$$

5, 6', MP

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma \vdash \beta}$$



تذکره: به تفاوت $\Gamma \vdash \neg \alpha$ و $\Gamma \not\vdash \alpha$ دقت کنید.

توضیح: «صحت» به ازای $\Gamma \vdash \alpha$ یا $\Gamma \not\vdash \alpha$ برقرار است یا $\Gamma \not\vdash \alpha$.

$\Gamma \not\vdash \alpha$: دنباله ای مبتنی بر فرضیات Γ که α وجود ندارد.

$\Gamma \vdash \neg \alpha$: دنباله ای مبتنی بر فرضیات Γ که $\neg \alpha$ وجود دارد.

یا درستی
برآورده شدن
satisfiable
= semantically consistent
به معنی سازگار
سازگاری
مجموعه ای از فرمول‌ها
دسته ای از فرمول‌ها
همه فرمول‌ها برقرار
در Γ
درست است.

تعریف ۱. (۱) مجموعه ای از فرمول‌ها منطقی گزاره ای (تئوری) نام دارد.

مانند Γ (به معنی نظریه)

(۲) یک تئوری گزاره ای نام هرگاه هیچ فرمولی مانند α که فرمول‌ها برقرار است

syntactically (consistent)

وجود نداشته باشد که $\Gamma \vdash \alpha$ و هم $\Gamma \vdash \neg \alpha$.

دسته ای

(۳) یک تئوری به معنی نظریه گزاره ای را متناقض می گویند.

Contradictory (s. inconsistent)

Γ
 $\{ (p \rightarrow q) \rightarrow r, \dots \}$
 p : راجح می آید...
 q : می رها...
 r : ارتفاع از سطح دریا... نظریه "

(Contradiction: متناقض)

مسئله: آیا ممکن است که فرمولی مانند $\alpha \in FORM$ به هم نرسد؟

$$\vdash \neg \alpha \quad , \quad \vdash \alpha$$

به بیان دیگر، آیا ممکن است دستگاه استنباعی
منطقی گزاره ای سازگار باشد؟
متناقض

اصول موضعه منطقی گزاره ای
 $\vdash$
 قائدهای استنباع
 MP
 (دسته ای استنباعی)
 منطقی گزاره ای

$$\vdash \alpha, \vdash \neg \alpha$$

ادامه تعریف: (۴) قبول α را از تقوید Γ مستقل بنام هرگاه $\Gamma \not\vdash \alpha$ و $\Gamma \not\vdash \neg \alpha$
 α independent from Γ
 و

یعنی قدرت مفروضات موجود در Γ آن اندازه نیست که حکمی قطعی درباره α به ما بدهد.

$$\begin{array}{l} \text{سؤال:} \\ \langle \mathcal{L}_D, + \rangle \\ \text{عمل در $\mathcal{L}_D$ } \\ n+y=y+n \end{array}$$

تذکره: هر یک نقطه سازگار مانند Γ ، به حالت بست به یک فرمول دارد، مانند α که گزارشات Γ سازگار باشد

$$1. \boxed{\Gamma \vdash \alpha} \implies \Gamma \not\vdash \neg \alpha \quad \checkmark$$

$$2. \boxed{\Gamma \vdash \neg \alpha} \implies \Gamma \not\vdash \alpha \quad \checkmark$$

$$3. \Gamma \not\vdash \alpha, \Gamma \not\vdash \neg \alpha \quad \checkmark$$

تذکره: اصطلاحاً یک تقوید سازگار یا مستقل نیز ابناً خود را از ذات میاره
 به همین دلیل در بررسی هر علم ریاضی ... دستیار شش فقره به کل آن رها داشته می شود

(*) به بیان دیگر، سازگار مستقل اساسی عبارت از حفظی تحت برهات.

$$\alpha \text{ refutes } \Gamma \text{ (یا } \alpha, \Gamma \text{ را رد می کند)}$$

تذکره: درجه حایریاضیات (علوم) $\Gamma \vdash \alpha$ یا $\Gamma \vdash \neg \alpha$ در دسترس است.

یا چیزی اثبات می شود یا رد می شود

اما چه؟ رفتن به منطق ریاضی این امکان را به ما می دهد که اثبات کنیم چیزی را نمی توانیم اثبات یا رد کنیم.

$$\Gamma \not\vdash \alpha, \Gamma \not\vdash \neg \alpha$$

سؤال ۱: استقلال اصل تراز از آندیسر از سایر اصول هنده به آندیسر
 استقلال اصل زنیج به از سایر اصول تقوید محسوب؟
 (AC)
 فرضیه پیرسون
 (CH)
 :

CH:

Continuum Hypothesis

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \dots$

$$|\mathbb{R}| = c = 2^{\aleph_0}$$

$\mathbb{Q}^c, \dots$

$$\text{تفصیلاً: } \aleph_0 < 2^{\aleph_0} \checkmark$$



آگر زیر مجموعه $X \subseteq \mathbb{R}$ به نحوی وجود دارد که

$$\aleph_0 < |X| < 2^{\aleph_0}$$

α : وجود حتمی ندارد

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \{\alpha\}$$

$$\mathcal{P}'' = \mathcal{P} \cup \{\neg \alpha\}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{P} \vdash^? \alpha & \text{خیر} \\ \mathcal{P} \vdash^? \neg \alpha & \text{خیر} \end{array} \right. \Rightarrow \alpha \text{ از } \mathcal{P} \text{ مستقل است.}$$

