

منطق های غیر کلاسیک

طرح ۳

مدل‌ها (عبدالرزاق) / مدل‌ها (عبدالرزاق)

Semantics

معنای

Syntax

نحو

منطق گزاره

structure

ساختار

$$\mathcal{M} = \langle M, \dots \rangle$$

چنانچه

$$\mathcal{R} = \langle IR, +, \cdot, <, 0, 1 \rangle$$

(=)

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_{f.o}, \mathcal{L} = \{f_1^2, f_2^2, P_1^2, c_1, c_2\}$$

$\mathcal{L}_{f.o}$

$\mathcal{L}$ -structure

signature

در برابر یک ساختار می‌تواند استفاده کنیم.

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{f_1^1\}$$

$$\mathcal{R}' = \langle \mathcal{R}, +, \cdot, <, 0, 1, \sin \rangle$$

$\mathcal{L}'$ -structure

نمادها $x_1, x_2, x_3, \dots$

$$\begin{cases} f_1^1, f_2^1, \dots \\ f_1^2, f_2^2, \dots \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1^1, P_2^1, \dots \\ \vdots \\ P_1^n, P_2^n, \dots \end{cases}$$

$c_1, c_2, c_3, \dots$

$\forall, \exists$

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

$(,)$

(model theory) (ساختار)

(proof theory) (رابطه استنباطی)

(computability) (decidability ...)

$$\mathcal{L} = \{=, \in\}$$

set theory

۱- نظریه مدل کلاسیک

۲- نظریه اثبات کلاسیک

۳- محاسبه پذیری

۴- تئوری مجموعه

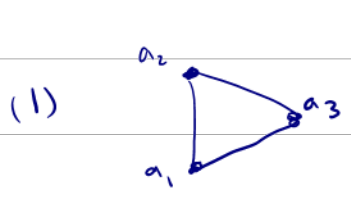
منطق رتبه اول

نقشه فرمولهای محققاتی در

تکلیف

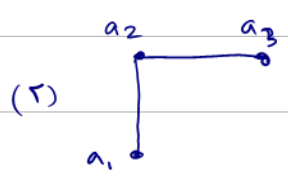
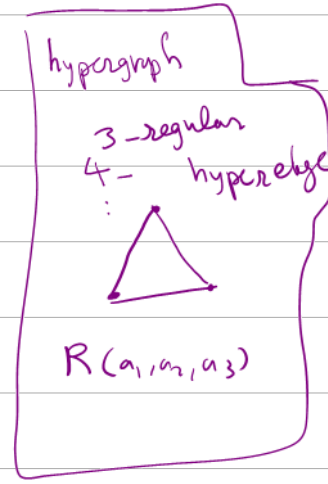
د موضوعی
 $L = \{P\}$

مثال



ع.ف. $M = \{a_1, a_2, a_3\}$
 - صفحه p

درستی یال



$m_1 = \langle M, p \rangle$ - صفحه

$M = \{a_1, a_2, a_3\}$
 p : یال درستی

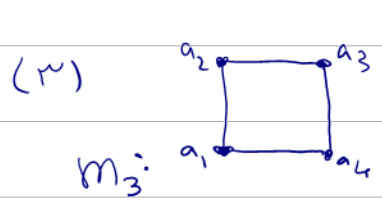
$m_2 = \langle M, p \rangle$ - صفحه

$\varphi \equiv \exists x_1, \exists x_2 (x_1 \neq x_2 \wedge \neg P(x_1, x_2))$: m_1, m_2

"دو عنصر متمایز وجود دارد که هیچ یالی بین آنها برقرار نیست."

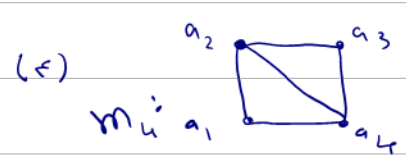
$\begin{cases} m_1 \models \varphi \\ m_2 \models \varphi \end{cases} \Leftrightarrow m_1 \models \neg \varphi$

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \equiv \bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$
 "مقابل $\neg$ عنصر وجود دارد"



$N = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
 p : یال درستی
 $\psi \equiv \exists x_1, \exists x_2, \exists x_3, \exists x_4 \left(\bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i, j=1,2,3,4}}^4 x_i \neq x_j \right)$

$m_3 = \langle N, p \rangle$
 $\begin{cases} m_3 \models \psi \\ m_2 \models \neg \psi \end{cases}$



$\theta \equiv \exists x_1, \exists x_2, \exists x_3, \exists x_4 \left(\bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i, j=1,2,3,4}}^4 x_i \neq x_j \wedge \forall x \left(\bigvee_{i=1}^4 x = x_i \right) \right)$

ع.ف. $\sigma \equiv \exists x, \exists y_1, \exists y_2, \exists y_3 \left(\bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i, j=1,2,3}}^3 y_i \neq y_j \wedge \bigwedge_{i=1}^3 y_i \neq x \wedge \bigwedge_{i=1}^3 P(x, y_i) \right)$ "دستی" $\neg$ عنصر وجود دارد

$m_3 \models \neg \sigma$ $m_4 \models \sigma$ "مقابل $\neg$ عنصر از رده 3 وجود دارد"

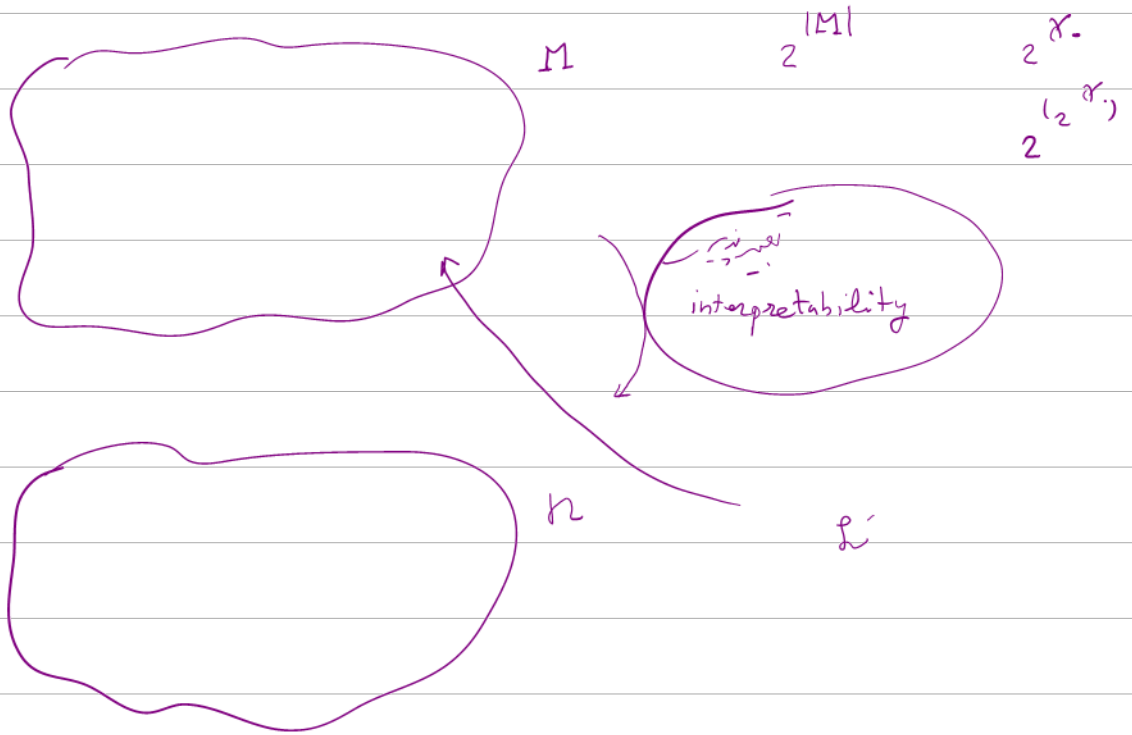
تعریف: دو L -ساخته M_1 و M_2 را هم‌ارزقده گوییم
(elementarily equivalent)

جمله هر L -جمله ماته φ داشته باشیم

$$M_1 \models \varphi \iff M_2 \models \varphi$$

(وژنه‌ها سرشته M_1 و M_2 از حد زبان L نسبتاً یکسان است)

L -ساخته



L -ساخته

مثال:

$$\begin{cases} \theta_1 \Rightarrow \forall x \neg P(x, x) \text{ irreflexive} \\ \theta_2 \Rightarrow \forall x \neq y (P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)) \text{ antisymmetric} \\ \theta_3 \Rightarrow \forall x \neq y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)) \text{ transitive} \end{cases}$$

نقطه شروع

مجموعه از جمله‌ها که به زبان L ساخته شده است

نقطه شروع

مجموعه از جمله‌ها که به زبان L ساخته شده است

تعریف: یک نظریه رتبه اول محکم از جمله‌ها رتبه اول است.

$$T_{s.p.o.} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$$

strict partial orders

$$M_1: \quad \bullet \quad a \quad M = \{a\}$$

$$p^M = \emptyset$$

ل-ساخته

تکامل از T_{spo} در آن
برقراری است.

$$M \models T_{spo}$$

$$M \models \varphi$$

$$M \text{ is a model of } T_{spo}$$

$$M \text{ models } T_{spo}$$

model

تعریف: یک ل-ساخته را مدل یک نظریه T می‌نامیم
هنگامی که مدل T در آن صادق باشد.

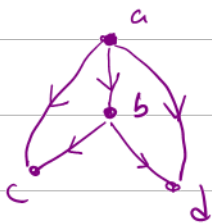
$$T_{slo} = T_{spo} \cup \{\theta_4\}$$

strict linear orders

$$\theta_4: \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow (P(x,y) \vee P(y,x)))$$

$$M_2 \models \neg \theta_4$$

M_2 :



توین: فرض کنید $L \subseteq L_F$ زبانی رتبه اول باشد.

در این صورت M را یک ل-ساخته می‌نامیم اگر در آن ویژگی‌های زیر برقرار باشد:

$$M \neq \emptyset$$

(۱) هر نماد در توین L ، با عنصر از M تعبیر شود.

(۲) هر نماد تابعی $f^n \in L$ با تابعی n -تایی (از M^n به M) تعبیر شود.

(۳) هر نماد n -تایی $P^n \in L$ را رابطه n -تایی (از M^n به $\{0,1\}$) تعبیر شود.

ل-نظریه

$$M \neq \emptyset$$

$$M = \mathbb{R}$$

$$L = \{c_1, c_2, f^1, f^2, P^1, P^3\} \subseteq L_F$$

$$\begin{array}{ccc} c_1^M & c_2^M & (f^1)^M \quad (f^2)^M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \quad \downarrow \\ 0 & 1 & \left\{ \begin{array}{l} \sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto \sin n \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x \cos y \end{array} \right\} \end{array}$$

$$(P^1)^M = N \subseteq \mathbb{R}$$

$$(P^3)^M = \{(x,y,z) \mid x=y=z\}$$



isomorphism

back-and-forth equivalent

isomorphism
 $m \cong n$

$\Rightarrow$

$m \equiv_b n$

$\Rightarrow$

هم‌ارزی
 $m \equiv n$

bft-equivalence

« یک زبان بین ویژگی‌ها برقرار است »

$\neq$

$\neq$

تقریباً دوگراف $\rightarrow$ تقریباً گراف

- مجموعه {
- تقریباً دوگراف
 - حلقه
 - بدان رب
 - بدان ارزیابی
 - ...

تعریف: دو L -اختار M و N را

تقریباً هم‌ارز می‌نامیم اگر تابعی یک‌به‌یک وجود داشته باشد

$h: M \rightarrow N$ مانده

همواره وجود داشته باشد:

(۱) به ازاء $c \in L$

$h(c^M) = c^N$

(۲) به ازاء $f^n \in L$ و $a_1, \dots, a_n \in M$

$h \left((f^n)^M(a_1, \dots, a_n) \right) = f^N(h(a_1), \dots, h(a_n))$

(۳) به ازاء $P^n \in L$ و $a_1, \dots, a_n \in M$

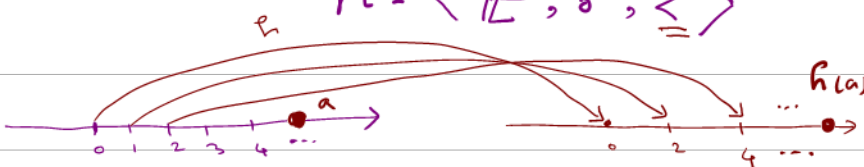
$M \models P^n(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow N \models P^n(h(a_1), \dots, h(a_n))$

$L = \{c, P\}$
 $M = \langle \mathbb{N}, 0, < \rangle$

۱۵۳

$E =$ اعداد طبیعی زوج

$N = \langle E, 0, \leq \rangle$



isomorphism:

رنگانی
form

$$\begin{cases} h: M \rightarrow E \\ x \mapsto 2x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{دو به دو} \\ & c^m = 0 = c^n \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\varphi(x)}}$$

$$x < y \stackrel{\checkmark}{\iff} 2x < 2y$$

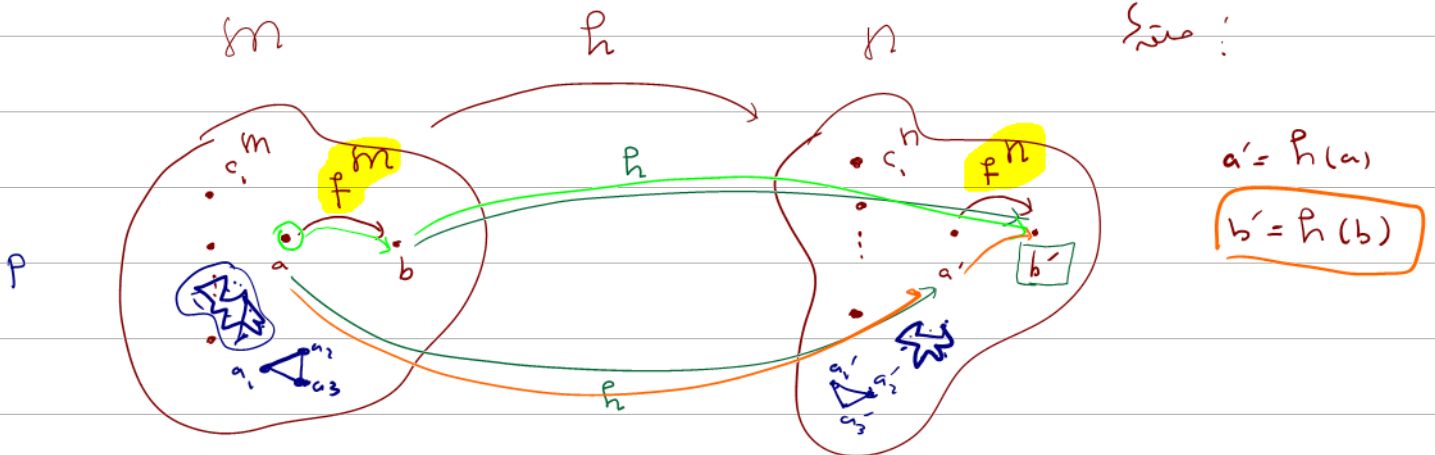
$$h(m), h(n)$$

$$m \models P(x, y) \iff n \models P(2x, 2y)$$

سیم

نمونه: گروهها، نگاشت‌های را ببینید.

مثله!



$$\underline{h}(\underline{f^m(a)}) = \underline{f^n(h(a))}$$

$$h(f^m(a_1, \dots, a_n)) = f^n(h(a_1), \dots, h(a_n))$$