

منطق ریاضی

شنبه ۲، ۱۲، ۱۴۰۲

بخش و منطق گزارها

(*) • Introduction to Mathematical Logic, Elliot Mendelson (6th edition).

• Logic and Structure, Dirk van Dalen

منطق گزارها؟

propositional logic

منطق مرتبه اول

(predicate logic) first-order logic

نظریه نامتناهی گول (محاسبه پذیری) (computability)

model theory (به همراه کاربردها در علوم کامپیوتر)

مجموعه ارزش‌ها

مجموعه ارزش احکام

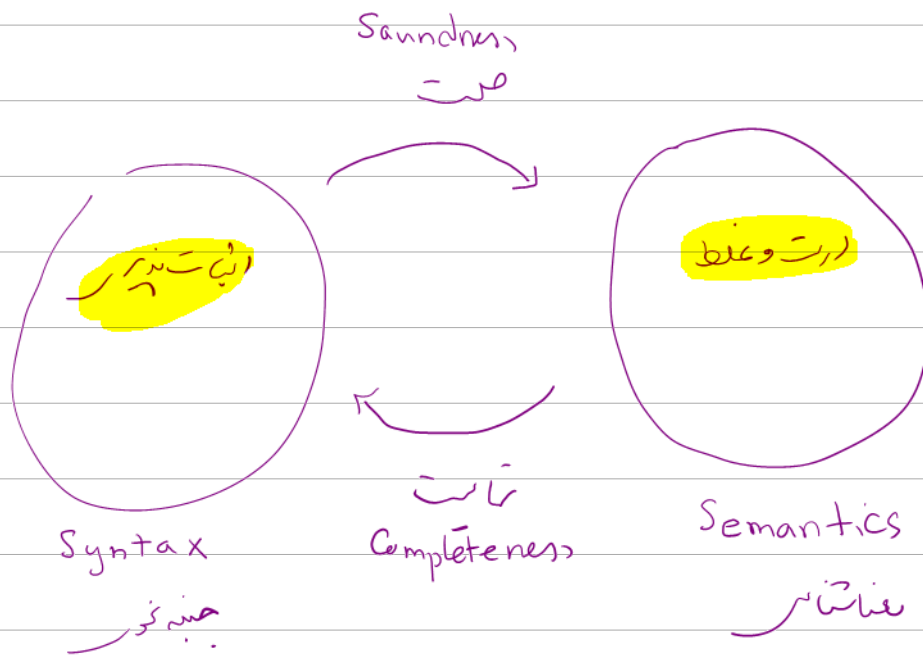
* تعداد اعداد اول نامتناهی است

Σ

نیمه قرن

۴

بازبان مناسبی باید مفروضات و احکام را بیان کنیم.



تعریف: گزاره همه از جنبریات

که قابل اقصاف به صدق و کذب
ات.

هوا گرم است.

آب در ره ریخ در 12°C به جوش می آید.
:

منو راجع
self-referential

من دروغ می گویم.

اگر ما ش بیان بیار.

کتاب را مدی منزه قرار بده.

اگر ما بدانیم می‌توانیم $\Rightarrow$ ما بین بهترین دانشم ثابت

من به یاد می‌آورم

$$\neg p \rightarrow q$$

$$p \wedge s \rightarrow q$$

p : بهترین زبان
 s : نتایج آزمون
 q : من به یاد می‌آورم

$$\neg p \wedge s \rightarrow q$$

p_1, p_2, p_3

اگر رفتار هوا زیاده‌بار باشد و دما به اندازه کافی بالا برود، آب جوش می‌آید

منطق صوری
 صورت

تعریف: زبان منطق گزاره شامل اجزاء زیر است:

(گزاره‌های مقبول)
 $p_1, p_2, p_3, \dots$
 (امتی)

(۱) بی‌نیاز به هم رکن پیوند منطقی:

(۲) گزاره پیوندهای منطقی:
 (وابعا)

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(۳) پرانتز چپ و راست: ()

تعریف:

(فرمول
 خوش ساخت)

$$v_1, v_2 \in V = \{T, F\}$$

مراجعه $v_1, v_2 \in V$

$$f(v_1, v_2) = f_v(f_{\neg}(v_1), v_2)$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

p

$\neg p$

T

F

F

T

f_v

$f_{\rightarrow}$

$p \leftrightarrow q$

$p \vee q$

p q

$p \wedge q$

$p \vee q$

$p \rightarrow q$

T

T

T

T

T

T

F

T

F

F

T

F

F

T

F

T

F

T

T

F

T

F

F

F

F

T

T

F

اگر تهران پایتخت ایران است آنگاه آب در ۱۰۰ رجه به جوش می آید.

T

T

$$p \xrightarrow{T} q$$

p q

T

T

0

T

F

0

F

T

0

F

F

0

در حالت صریح $V = \{T, F\}$

$$f: V^n \rightarrow V$$

تابع ارزش

$$f_{\wedge}: V^2 \rightarrow V$$

$$n=1: \begin{cases} f_1: V \rightarrow V \\ T \mapsto T \\ F \mapsto T \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2: V \rightarrow V \\ T \mapsto F \\ F \mapsto T \end{cases}$$

p_1	p_2	$\dots$	p_n	f	g	$\dots$
$\left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 2^n$				T	F	
				T	F	
				$\vdots$	$\vdots$	
				T	F	
						φ $(p \wedge q \rightarrow s) \vee (q \rightarrow p)$ $f_\varphi: V^3 \rightarrow V$

تذکره - هر فرمول ساخته شده با

گزاره پیوندها، منطقی و گزاره نماها را

اینها معادل با یک تابع ارزش است

سوال ۱ آیا با داشتن گزاره پیوندها منطقی می توان همه توابع ارزش را تولید کرد؟

تعریف - مجموعه ای از توابع ارزش را بسته می نامیم هرگاه همه توابع ارزش دیگر را تولید کند.
adequate

$$f_\wedge, f_\vee, f_\neg \quad \boxed{f: V^n \rightarrow V}$$

قضیه ۱ - مجموعه $\{\neg, \vee, \wedge\}$ مجموعه ای بسته از گزاره پیوندها است.

به بیان دیگر، هر تابع ارزش مثل $f: V^n \rightarrow V$ را که در نظر بگیریم

فرمولی تنها مثل گزاره پیوندها $\neg, \vee, \wedge$ وجود دارد که دارای

جدول ارزشی یکسان با f است.

row	p_1	p_2	$\dots$	p_n	f
R_1	T	T		T	(T)
R_2	T	T	$\dots$	F	(T)
	$\vdots$				$\vdots$

$$\{R_{i_1}, \dots, R_{i_k}\} \leftarrow$$

به ازای هر سطح از جدول f که f در آن دارای ارزش

دارد است فرمولی به شکل زیر تعریف میکنیم:

$$\alpha_{i_l} \Rightarrow p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \quad l=1, \dots, k$$

$R_{2^n} \quad F \quad F \quad \dots \quad F$

$\neq$

$$\beta_j \Rightarrow \begin{cases} p_j & \text{اگر در سطح } R_{i_l} \text{ ارزش } p_j \text{ داشته باشد} \\ \neg p_j & \text{اگر در سطح } R_{i_l} \text{ ارزش } p_j \text{ نداشته باشد} \end{cases}$$

p_1	p_2	p_3	$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	T

Conjunction
ترکیب عطفی: $\wedge$
ترکیب فصلی: $\vee$
disjunction

فرض کنید که دارای جدول ارزش است:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3)$$

به راحتی دیده می شود که اولاً: α_{i1} فرمولاتی که درسط R_i ارزش درست دارد.

ثانیاً: α_{i2} در هر سطری غیر از R_i ارزش غلط دارد.

در نتیجه فرمول $\alpha_{i1} \vee \alpha_{i2} \vee \dots \vee \alpha_{in}$ دارای جدول ارزش
دقیقاً بیان با جدول ارزش فرمولات.



بنابراین حریف از مجموعه $\{ \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftarrow \}$ به تنهایی بسته هستند.

$$p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \Rightarrow \text{بسته است } \{ \neg, \vee \}$$

$$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \text{بسته است } \{ \neg, \wedge \}$$

تمرین