

فهرست

- [۱] . معانی نامی منطق گزاره ها ص ۱
- مجموعه‌ای بسنده از گزاره‌پیوندها ص ۱۵
- [۲] . فیلترها و اولترافیلترها ص ۲۴
- رابط‌های هم‌ارزی و ساختار جبری فرمول‌ها ص ۲۹
- جبرهای بول
- فیلترها و ایده‌آل‌ها یک جبر بول ص ۳۹
- قضیه نمایش پذیری استون ص ۴۹
- [۳] . ساختار نحوی منطق گزاره‌ها ص ۵۱
- قضایای صحت و تمامیت ص ۶۳

مبانی منطق و نظریه مجموعه ها

بهار ماه ۱۳۹۹ - دانشگاه اصفهان

#۱

Logic
→ Λογος
یونانی

به معنای
شناخت، کلام
عقل ...

شناخت
Biology
زیت شناسی
anthropology
مردم شناسی
archeology
آبشن شناسی
:

Logos
لاسن
در تحلیل حجم به معنای
«کلمه» که آمده است -
له کلمه الی

منطق: از ریشه «نطق»

• می توان منطق را به شکل کلی با عنوان «علم استدلال کردن» توصیف یا تعریف کرد.

• منطق + ریاضیات از اوایل قرن ۱۹ میلادی

Mathematical Logic

زبان language

Semantics
معنا شناسی

Syntax & deductive
system
دستگاه استدلالی

مثلاً اگر باران بیاید زمین خیس می شود
p q

p: باران باران

q: خیس شدن زمین

$p \rightarrow q$

مثلاً: اگر عددی طبیعی زوج و بزرگتر از ۲ باشد نمی‌تواند اول باشد.

r : اول بودن

p : زوج بودن

q : بزرگتر از ۲ بودن

$$p \wedge q \rightarrow \neg r$$

مثلاً: سیدش در طول هفته یا مسئول به کار است یا به دانشگاه می‌رود.

p : سیدش مسئول به کار است

q : سیدش به دانشگاه می‌رود

$$p \vee q$$

تعریف ۱-۱

زبان منطق گزاره‌ها: (Propositional Logic)

(atomic symbols)

نمادهای اتمی

• بی‌نهایت نمادش می‌تواند برای نمادهایی به شکل: $p_1, p_2, p_3, \dots$

$\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$

• رابط‌های منطقی:

(logical connectives)

()

• پرانتزهای چپ و راست:

• بنابراین در این زبان با حسین الفبا، کلمات یا جملات مانند هر زبان دیگری (بنام مشابهی)

از نمادهای الفبایی هستند. مثلاً: محمد، علی، کتاب، دفتر،

tree, node, route, ...

مثلاً: علی به دانشگاه می‌رود

He participated in a logic workshop.

در مثال‌های بالا نمونه‌هایی از کلمات منطقی گزاره‌ها را داریم

$$p \rightarrow q, p \wedge q \rightarrow r, p \vee q, \dots$$

سؤال: آیا هر دنباله متناهی از الصباک زبان را باید بپذیریم؟ خیر

$(p, (\rightarrow, \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \vdash, \dots)$

تعریف ۱-۲: فرمول خوش ساخت (well formed formula)

مجموعه فرمول‌های خوش ساخت یا به شکل کوتاه فرمول‌های منطقی گزاره‌ها مجموعه استقرایی است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

(الف) هر صیغه مادها گامتی یک فرمول خوش ساخت هستند.

(ب) در صورتی که ϕ و ψ «فرمول خوش ساخت» باشند، آنگاه

$(\neg\phi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$

فرمول خوش ساخت خواهند بود.

(ج) یک دنباله متناهی از مادها که زبان تنها در صورتی یک فرمول خوش ساخت است که از یکی از مراحل (الف) یا (ب) به دست آمده باشد.

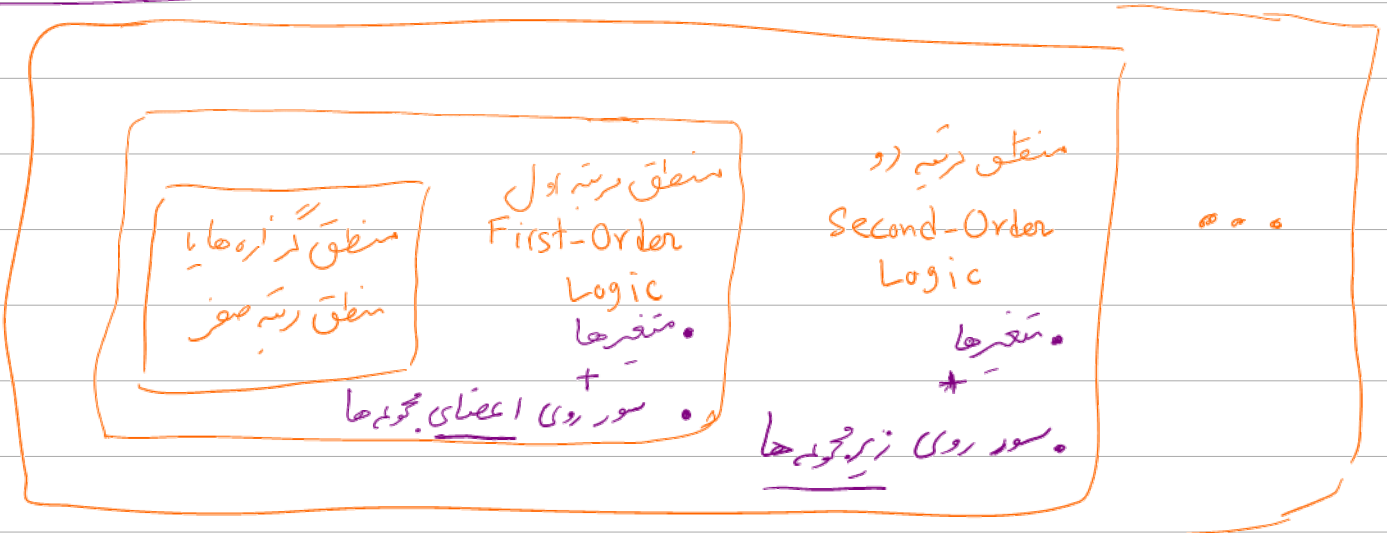
مجموعه صیغه‌های فرمول‌های خوش ساخت زبان را با FORM نمایش می‌دهیم.

#۲

تعریف دقیق یک «منطق» چیست؟ تحت عنوان درسی که abstract logic

انواع مختلف منطق وجود دارد.

تذکره ۱-۳



• جمله مانند • ای کاش ما را می یارَد

• نایسته است که حرفی وظایف خودش را به انجام برساند

• اینجا تا گل برافشانم و می درساغ اندازم
 آفتاب راستف بیستکافتم و طریقی نو در اندازم
 • من دروغ می گویم

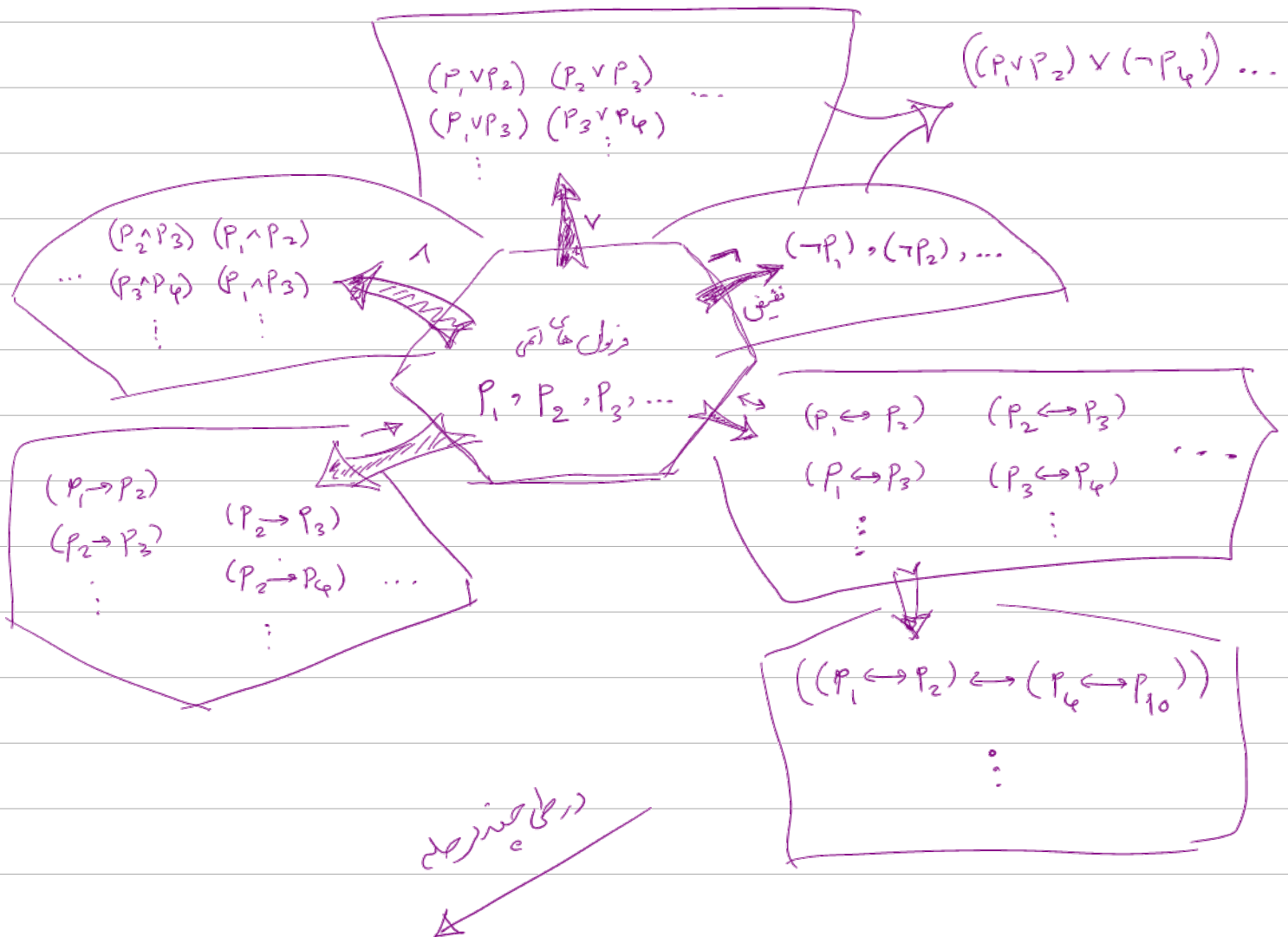
* بررسی بعضی از جملات فوق در منطق های دیگری انجام می شود مانند

Modal Logic Deontic Logic

منطق تحت

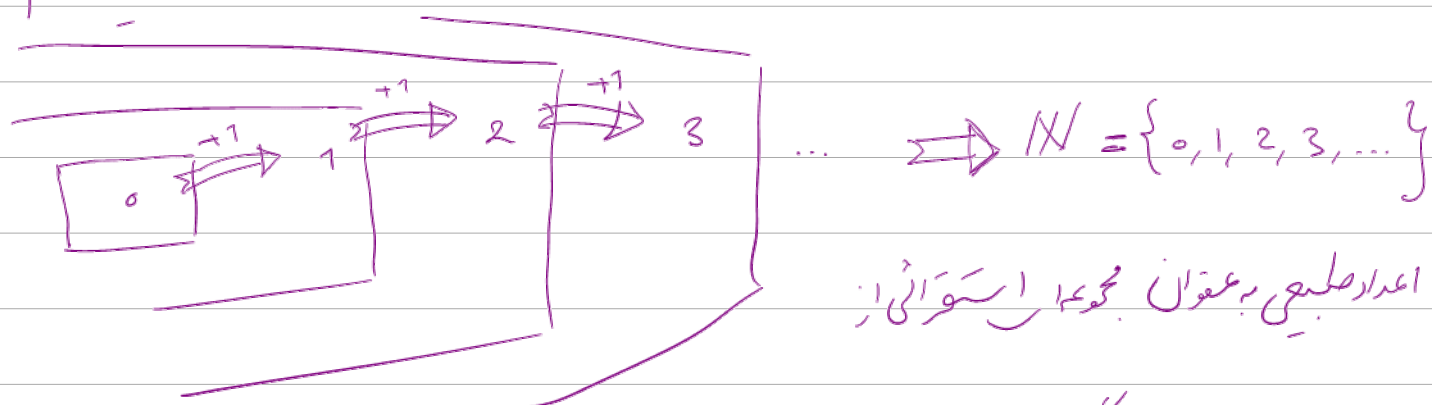
منطق بایست ها

به فرض خوش حالت برگردیم!



$$\left((\neg P_1) \rightarrow \left((P_1 \vee P_{100}) \wedge (\neg (P_5 \leftrightarrow P_7)) \right) \right)$$

مجموعه FORM به عنوان یک مجموعه استقرائی با مجموعه اعداد طبیعی مقابله کنیم



مجموعه پایه $\{0\}$ و عملگر آبی بدست آمده است.

مجموعه FORM به عنوان مجموعه استقرائی از مجموعه پایه $\{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ فرمول‌های محلی و عملگرهای براساک رابطه‌های منطقی $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg$ بدست آمده است.

* اصل استواء در حالت کلی، درباره هر مجموعه استقرائی است.

گزاره ۴-۱ تعداد پیرانترهای چپ و راست در هر فرمول با هم مساوی است.

اثبات: با استفاده از اصل استواء.

به ازای هر فرمول مانند $\varphi \in \text{FORM}$ ، مقادیر $l(\varphi)$ و $r(\varphi)$ را به ترتیب

تعداد پیرانترهای راست و چپ وضع می‌کنیم.

هدف: در هر فرمول $\varphi \in \text{FORM}$ ثابت کنیم:

$$r(\varphi) = l(\varphi)$$

پایه استواء: فرمول‌های اتمی، در هر فرمول اتمی مانند p_i تعداد پیرانترهای چپ و راست

همه مساوی با صفر است. بنابراین داریم

$$r(\varphi) = l(\varphi) = 0.$$

حالت ۶ : فرض می‌کنیم که می‌دانیم تعداد رانترهای راست و چپ فرمول φ با هم برابر است

$$r(\varphi) = l(\varphi) \quad (*)$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که هر فرمول ψ به شکل $(\neg\varphi)$ است نیز داریم:

$$r(\psi) = l(\psi)$$

اما، می‌دانیم که $r(\psi) = r(\varphi) + 1$ و $l(\psi) = l(\varphi) + 1$ پس با استفاده

از فرض استقراء، (*) خواهیم داشت:

$$r(\psi) = r(\varphi) + 1 \stackrel{(*)}{=} l(\varphi) + 1 = l(\psi) \quad \checkmark$$

حالت ۷ : فرض می‌کنیم که برای فرمول‌های φ_1 و φ_2 داریم

$$\begin{cases} r(\varphi_1) = l(\varphi_1) \\ r(\varphi_2) = l(\varphi_2) \end{cases} \quad (*)$$

می‌خواهیم نشان دهیم که هر فرمول ψ به شکل $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ است نیز داریم:

$$r(\psi) = l(\psi)$$

$$\begin{cases} r(\psi) = r(\varphi_1) + r(\varphi_2) + 1 \\ l(\psi) = l(\varphi_1) + l(\varphi_2) + 1 \end{cases} \quad \text{اما، می‌دانیم که}$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$r(\psi) = r(\varphi_1) + r(\varphi_2) + 1$$

$$\stackrel{(*)}{=} l(\varphi_1) + l(\varphi_2) + 1$$

$$= l(\psi) \quad \checkmark$$

حالات ۷، ۸ و ۹ سببه حالت ۶ → خواهد بود

در نتیجه، بنابر اصل استقراء و به این علت که FORM مجموعه استقرائی است

به ازای هر $\varphi \in \text{FORM}$ خواهیم داشت

$$v(\varphi) = l(\varphi).$$



توابع با مقادیر ارزش (truth-value functions)

#3

* ارزش: منظور ارزش درست یا غلط یک فرمول است که تنها دو حالت خواهد داشت

$$V = \{T, F\}$$

1 یا T: درست

0 یا F: غلط

* یک تابع با مقادیر ارزش یا به طور مختصر «تابع ارزش» n -موضعی تابعی است به شکل

$$f: V^n \rightarrow V$$

مادامه که n از آنجا که f یک تابع است می باید به عددی رسانده های n -تایی عضو از V را نسبت دهیم

$$|V| = 2 \Rightarrow |V^n| = 2^n$$

یعنی باید به همی 2^n عضو V^n مقدار ای از

درست یا غلط را نسبت بدهد.

یک تابع ارزش را می توان با استفاده از یک جدول که به آن جدول ارزش می گویند نمایش داد.
(truth table)

به عنوان مثال، جداول زیر برخی توابع ارزش n -موضعی را توصیف می کنند:

مقدار تابع	دامنه با ورودی تابع			
	f_1	f_2	f_3	f_4
T	T	T	F	F
F	T	F	T	F

دسته		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F

$\swarrow$ tautology (همواره درست)
 $\checkmark$
 $\nearrow$ projection (تصویر روی مؤلفه اول)
 $\pi_1(x, y) = x$
 $\rightarrow$
 $\leftrightarrow$ NAND
 $\wedge$
 $\downarrow$ NOR
 $\searrow$ antilogy (همواره نادرست)
 تناقض

$$f_9(x, y) = f_7(f_8(x, y))$$

$$f_{10}(x, y) = f_7(f_7(x, y))$$

⋮

$$f_{16}(x, y) = f_7(f_1(x, y))$$

در حالت کلی



$$f_i(x, y) = f_7(f_{17-i}(x, y))$$

$$i \in \{1, 2, \dots, 16\}$$

$$f_2(x, y) = f_7(f_8(f_7(x), f_7(y)))$$

$$f_5(x, y) = f_2(f_7(x), y)$$

مسئله ۱-۷

تمرین (۱-۳): (الف) f_7 را با استفاده از f_5 و f_8 بسازید.

(ب) f_7 را با استفاده از f_8 و f_7 بسازید.

(پ) f_{12} را با f_2 و f_7 بسازید.

توابع و جدول ارزش اصلی (مساخر با رابطه منطقی)

p	$\neg p$
T	F
F	T

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$$((p \rightarrow q) \vee r)$$

جدول ارزش یک فرمول

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$((p \rightarrow q) \vee r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

نمونه تشخیص رابطه منطقی اصلی یک فرمول

۱. اگر فرمول داده شد هیچ برانتری داشت، آن فرمول یک فرمول ایمنی است و بنابراین

رابطه منطقی ندارد.

۲. در غیر این صورت، آن فرمول باید برانتر جیب شروع می شود، نماهای ظاهر شد

(tautology)
توتولوژی

تست کردن اینکه یک فرمول همواره درست است

X

$$(P_1 \vee P_2)$$

T	T	T
T	T	F
F	T	T
F	F	F

$$(P_1 \vee (\neg P_1))$$

T	T	F	T
F	T	T	F

✓

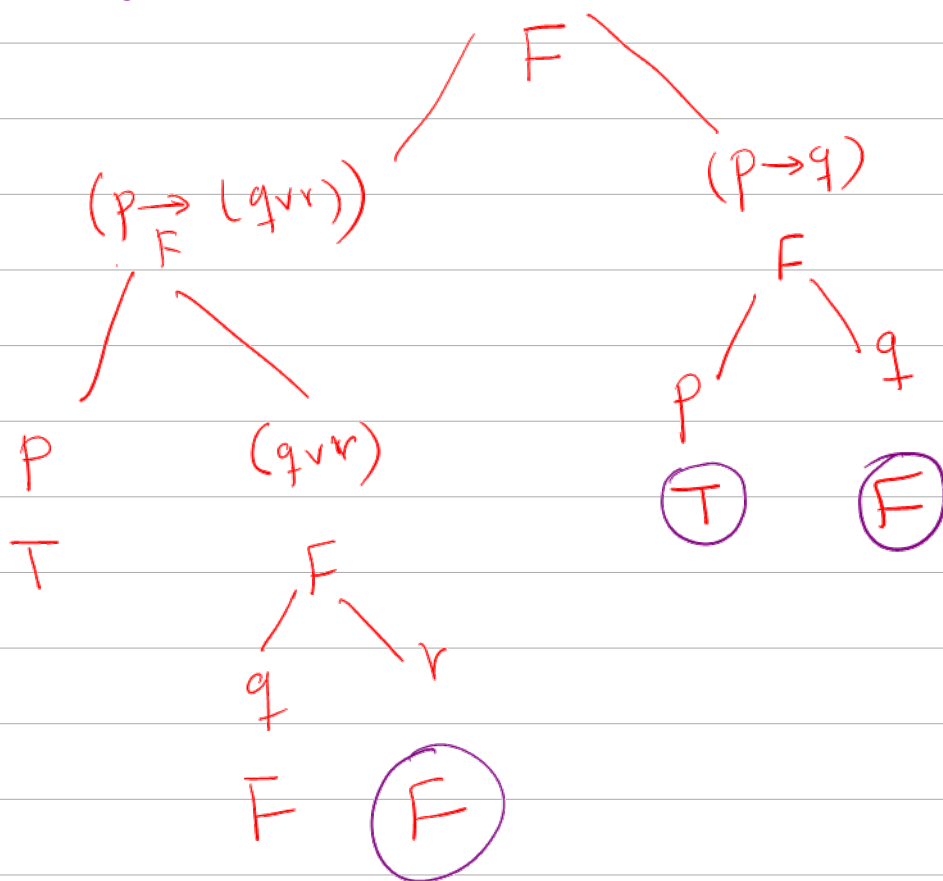
$$(P \rightarrow Q)$$

T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	T	T

X

$$((P \rightarrow (Q \vee R)) \vee (P \rightarrow Q))$$

مثال ۱۰-۱



P	Q	R
T	F	F

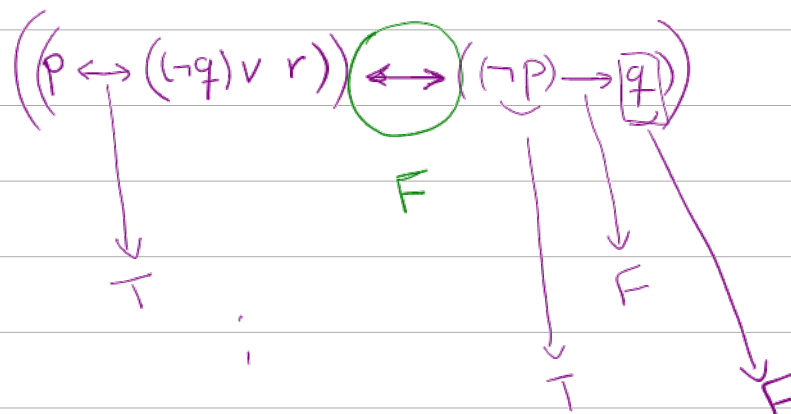
در نتیجه این فرمول یک توتولوژی نیست

زیرا ارزش دهی به شکل برود وجود دارد

که ارزش آن را غلط خواهد کرد.

مسئله ۱۱-۱۰ مشخص کنید که آیا فرمول زیر یک توتولوژی است یا نه.

#۴



p	q
F	F

قوانین حذف پرانتزها

- پرانتزهای بیرون را حذف می‌کنیم.
- رابطه‌های منطقی به ترتیب زیر قوی‌تر می‌شوند یا محمل می‌کنند: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
 $\neg p \vee q, (\neg p) \vee q$
- دو رابطه منطقی مشابه در یک فرمول ظاهر می‌شوند، از سمت چپ قوی‌تر عمل می‌کنند.
- تفصیل‌ها در متوالی، از سمت راست قوی‌تر عمل می‌کنند.

Handwritten notes showing the simplification of the formula $((p \leftrightarrow ((\neg q) \vee r)) \leftrightarrow ((\neg p) \rightarrow q))$ to $p \leftrightarrow q \vee r$.

مسئله ۱۲-۱۱

- $((\neg p) \wedge q) \rightarrow \neg p \wedge q$
- $((p \wedge q) \vee r) \rightarrow p \wedge q \vee r$ and $(p \wedge q) \vee r$
- $(\neg(\neg p))$
- $p \rightarrow q \rightarrow r \rightsquigarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$
- $(p \leftrightarrow (q \vee (\neg r)))$

تعریف ۱۳-۱ (الف) فرمول β را نتیجه منطقی (logical consequence) α می‌گویند اگر $\alpha \rightarrow \beta$ یک توتولوژی باشد.

معادله، می‌گویند α ، β را به نحو منطقی نتیجه می‌دهد.

(α logically implies β)

ب) فرمول‌ها α و β را منطقاً معادل می‌گویند اگر $\alpha \leftrightarrow \beta$ یک توتولوژی باشد. (logically equivalent)

مثال ۱۴-۱ بررسی کنید آیا β نتیجه منطقی α است یا خیر.

• $\alpha: p \wedge q$

$\beta: p$

تمرین ۱۳-۱. مثال (۱۴-۱) را به طور کامل حل کنید.

• $\alpha: p$

$\beta: p \vee q$

• $\alpha: p$

$\beta: q \rightarrow p$

گزاره ۱۵-۱ در صورتی که α و $\beta \rightarrow \alpha$ توتولوژی باشند، آنگاه β نیز یک توتولوژی است.

اثبات

فرض کنیم $P_1, \dots, P_n$ همگی اتم‌هایی باشند که در $\alpha \rightarrow \beta$ ظاهر شده‌اند. این اتم‌ها را به‌شکل زیر از نو می‌نمایم که داشته باشیم

$$\begin{array}{ccccccc} P_1 & P_2 & \dots & P_m & P_{m+1} & \dots & P_{m+k} & P_{m+k+1} & \dots & P_n \\ \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} & \underbrace{\hspace{10em}} \\ \text{تنها در } \beta & \text{تنها در } \alpha & \text{هم در } \alpha \text{ و هم} & \text{تنها در } \alpha & \text{تنها در } \alpha & \text{تنها در } \alpha & \text{هم در } \alpha \text{ و هم} & \text{هم در } \alpha \text{ و هم} & \text{هم در } \alpha \text{ و هم} & \text{هم در } \alpha \text{ و هم} \\ \text{ظاهر شده‌اند} & \text{ظاهر شده‌اند} & \text{ظاهر شده‌اند} & \text{ظاهر شده‌اند} & \text{ظاهر شده‌اند} & \text{ظاهر شده‌اند} & \text{ظاهر شده‌اند} & \text{ظاهر شده‌اند} & \text{ظاهر شده‌اند} & \text{ظاهر شده‌اند} \\ P_\beta & P_\alpha & P_{\alpha\beta} & P_\alpha & P_\alpha & P_\alpha & P_{\alpha\beta} & P_{\alpha\beta} & P_{\alpha\beta} & P_{\alpha\beta} \end{array}$$

$$P_\beta := \{P_1, \dots, P_m\}, \quad P_\alpha := \{P_{m+1}, \dots, P_{m+k}\}, \quad P_{\alpha\beta} := \{P_{m+k+1}, \dots, P_n\}$$

از طرفی، متناظر با هر فرمول α ، β ، $\alpha \rightarrow \beta$ توابع ارزش به ترتیب $(n-m)$ -موضعی، $(n-k)$ -موضعی و n -موضعی وجود دارند که آنها را به ترتیب با f_α ، f_β و $f_{\alpha \rightarrow \beta}$ نمایش می‌دهیم.

در صورتی که β یک توتولوژی نباشد، دنباله $\vec{v} = (v_1, \dots, v_{n-k}) \in V^{n-k}$

وجود خواهد داشت که به آن داریم

$$f_\beta(v_1, \dots, v_{n-k}) = F \in V \quad (V = \{T, F\})$$

رابطه‌های اتم‌های P_β

درست کنند که $\vec{v}$ به شکل زیر است:

$$\vec{v} = (v_1, \dots, v_m, \underbrace{v_{m+1}, \dots, v_{n-k}}_{\text{رابطه‌های اتم‌ها موجود در } P_{\alpha\beta}})$$

حال، با استفاده از $\vec{v}$ می‌توان دنباله n -تایی به شکل زیر با تعادری از V ساخت

$$\vec{v}' = (v_1, \dots, v_m, v'_{m+1}, \dots, v'_{m+k}, v_{m+1}, \dots, v_{n-k}) \in V^n$$

که در آن، $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n+k}$ به نحو انتخاب شده اند. مثلاً می توان همه را
 T در نظر گرفت و دنباله $\bar{v}$ را به شکل زیر ساخت:

$$\bar{v}' = (v_1, \dots, v_m, T, \dots, T, v_{m+1}, \dots, v_{n-k}) \in V^n$$

$$\bar{v}'' = (T, \dots, T, v_{m+1}, \dots, v_{n-k}) \in V^{n-m}$$

از طرفی، دنباله $\bar{v}$

و به این علت که α یک توتولوژی است، پس آن خواهم داشت

$$f_\alpha(\bar{v}'') = T.$$

p_1	p_2	$\dots$	p_m	p_{m+1}	$\dots$	p_{m+k}	p_{m+k+1}	$\dots$	p_n	α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
v_1	v_2	$\dots$	v_m	T	$\dots$	T	v_{m+1}	$\dots$	v_n	T	F	

که مابین توتولوژی بودن $\alpha \rightarrow \beta$ در تناقض است □

مجموعه ای بسته از رابط‌های منطقی

Adequate Set of Connectives

گزاره ۱۶-۱۰. به ازای هر $n \in \omega$ ، هر تابع ارزش n -نمونه‌ای را می توان با استفاده از

مجموعه رابط‌های منطقی $\{\neg, \wedge, \vee\}$ تولید می شود.

اثبات: تابع ارزشی مانند $f: V^n \rightarrow V$ توسط جدول ارزشی با 2^n سطر دارد می توان

	p_1	p_2	p_{n-1}	p_n		$f(x_1, \dots, x_n)$
	x_1	x_2	x_{n-1}	x_n		
1	T	T	...	T	T	$\oplus$
2	T	T	...	T	F	F
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\rightarrow$	$\neg p_1$	F	...	F	p_n	$\oplus$
2^n	F	F	...	F	F	F

$$\alpha_i = \beta_1^i \wedge \beta_2^i \wedge \dots \wedge \beta_n^i$$

$$j \in \{1, \dots, n\}, \beta_j^i \rightarrow p_j$$

$$\neg p_j$$

سؤال خاص: در حالت $n=3$ و یک تابع ارزش خاص می بینیم که فرمولی که تنها شامل رابطها
منطقی $\neg, \wedge, \vee$ است چگونه بدست می آید:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
T	T	T	$\oplus$
T	T	F	F
$\rightarrow$ T	<u>F</u>	T	$\oplus$
T	F	F	F
<u>F</u>	T	T	$\oplus$
<u>F</u>	T	<u>F</u>	$\oplus$
F	F	T	F
F	F	F	F

$$\oplus \rightarrow (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \alpha_1$$

$$\oplus \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3) \alpha_3$$

$$\oplus \rightarrow (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \alpha_5$$

$$\oplus \rightarrow (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \alpha_6$$

$\Rightarrow \alpha_3$ غلط
 (T, T, T)
 $(T, F, T) \in V^3$
 $(F, F, T) \notin V^3$
غلط α_3

فرمول معنی شده به جدول f از ترکیب فصلی $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ بدست می آید؛ یعنی به شکل زیر است
(disjunctive)

$$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 \vee \alpha_4$$

اثبات گزاره به ازاء $i \in \{1, \dots, 2^n\}$ و متناظرا به سطر i -ام جدول f

تعداد n فرمول به نامها $\beta_1^i, \beta_2^i, \dots, \beta_n^i$ به شکل زیر تعریف می کنیم

$$\beta_j^i \Rightarrow \begin{cases} p_j & \text{در سطر } i\text{-ام } p_j \text{ برابر } T \text{ است} \\ \neg p_j & \text{در سطر } i\text{-ام } p_j \text{ برابر } F \text{ است} \end{cases}$$

روی در بیاندهای متناهی
از اشیای زبان

#5

حال، فرمول α را متشکل از ترکیب عطفی (conjunctive) $\beta_1^i, \dots, \beta_n^i$ به شکل زیر در نظر می گیریم

$$\alpha_i \equiv \beta_1^i \wedge \dots \wedge \beta_n^i$$

پس، فرمول φ را ترکیب فصلی همه α_i های می گیریم که f در سطر i -ام ارزش T دارد. به بیان دقیق تر، اگر $I_T = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, 2^n\}$ مجموعه سطرها را جدول f باشد

که f در آنجا ارزش T دارد، آنگاه فرمول φ را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$\varphi \equiv \bigvee_{i \in I_T} \alpha_i \equiv \alpha_{i_1} \vee \dots \vee \alpha_{i_k}$$

$$\begin{array}{l} \text{* حالت خاص: } I_T = \emptyset \\ \varphi \equiv p_1 \wedge \neg p_1 \end{array}$$

ارعا 1 جدول ارزش متناظر با φ با جدول ارزش f یکسان است.

اثبات ارعا 1 به منظور اثبات ارعا، کافیت نشان دهیم که هر α_i تنها در سطر متناظر با خودش (یعنی سطر i -ام جدول f) ارزش T دارد.

ارعا 2: به ازای هر $i \in \{1, \dots, 2^n\}$ ، اگر $v = (v_1, \dots, v_n) \in V^n$ $v_l = \text{حقیقه}$ دنباله ارزش متناظر با سطر l -ام جدول f باشد آنگاه

$$\alpha_i \text{ با ارزش دهی } v \text{ حقیقه} \iff \underline{i=l}.$$

اثبات ارعا 2 ($\Rightarrow$) فرض کنیم α_i با ارزش دهی v حقیقه، ارزش T داشته باشد. طبق تعریف

$$\alpha_i \text{ به شکل زیر است: } \underline{\beta_1^i \wedge \dots \wedge \beta_n^i}$$

بنابراین،

به ازای هر $i \in \{1, \dots, 2^n\}$ باید برابر با T باشد (*)

از طرفی، اگر $l \neq 1$ باشد، طبق تعریف، حداقل یکی از فنون های $p_1, \dots, p_n$ وجود دارد که در سطر l -ام ارزش T دارد و در سطر l -ام ارزش F (یا برعکس) (F) (T)

فرض کنید p_t چنین فنونی است که در سطر l -ام ارزش T دارد و در سطر l -ام ارزش F دریافت.

اولاً، در فنون α : β_t مساوی با p_t خواهد بود.

ثانیاً، در سطر l : $v_t = F$ (T)

یعنی، با ارزش دهی v ، ارزش β_t برابر با F خواهد بود که این مسئله با نتیجه گیری (*) در تناقض خواهد بود. $\times$

پس فرض $l \neq 1$ نمی تواند درست باشد و خواهیم داشت $l=1$

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$ فرض کنیم $l=1$ است. بنابراین ارزش دهی (یا توزیع ارزش)

متناظر با سطر l -ام جدول F در نظریه گیریم، می خواهیم نشان دهیم که

α با این ارزش دهی، ارزش T خواهد داشت.

بنابراین α ارزش T داشته باشد، باید نشان دهیم که به ازای هر $j \in \{1, \dots, n\}$

β_j ارزش T دارد. اما، به ازای هر $j \in \{1, \dots, n\}$ ، طبق تعریف β_j برابر با p_j

است چرا که ارزش p_j در سطر l -ام برابر با T باشد و β_j برابر با p_j است چرا که

یعنی $T = v_j$

ارزش p_j در سطر l -ام برابر با F باشد که در صورت ارزش β_j

یعنی $v_j = F$

(ارغی ۲)

حال، برداشتن ارغی ۲، به سادگی ارغی ۱ قابل اثبات است.

زیرا، اگر فرض کنیم φ به ازای دنباله ارزشی مانند $(v_1, \dots, v_n) = \overline{v}$ درست باشد، به این

معناست که $i \in I_T$ و وجود دارد ارزش α به $\overline{v}$ ریشه $\overline{v}$ ، درست خواهد بود.

و بنابراین، $\overline{v}$ چیزی نمی تواند باشد به جز ارزش α متناظر با سطر i -ام جدول f .

و از آنجا که $i \in I_T$ ، خواهیم داشت $f(v_1, \dots, v_n) = T$.

از طرف دیگر، اگر فرض کنیم φ به ازای ارزشی مثل $(v_1, \dots, v_n) = \overline{v}$ غلط باشد، یعنی به ازای هر $i \in I_T$ ، ارزش α نیز به ازای آن ارزشی غلط است.

از آنجا که بنابراین، α تنها به ازای ارزشی متناظر با سطر i -ام از جدول f ، درست است. بنا بر این، $\overline{v}$ نمی تواند هیچ کدام از این ارزش ها باشد، پس $i \notin I_T$ و وجود دارد

که $\overline{v}$ ارزشی متناظر با سطر i -ام جدول f است که $\overline{v} = \overline{v}$ به خلق تعریف I_T

خواهیم داشت $f(v_1, \dots, v_n) = F$

□

تعریف ۱-۱۷. مجموعه ای متناهی از توابع ارزشی مانند $\{f_1, \dots, f_k\}$ را مجموعه ای بسنده (an adequate set)

از توابع ارزشی گوئیم چنانچه هر تابع ارزشی دیگری مانند

$$f: V^n \rightarrow V$$

را بتوان به شکل ترکیبی از $f_1, \dots, f_k$ نوشت. (توجه کنید که هر یک از f_i ها می تواند دامنه ای متفاوتی داشته باشد: $(V, V^2, V^3, \dots, V^n, \dots)$)

نتیجه ۱۸-۱ الف) مجموعه $\{f_7, f_8, f_9\}$ مجموعه بسته از توابع ارزش است.

ب) با حرکت از مجموعه‌های $\{f_7, f_8\}$ و $\{f_7, f_9\}$ و $\{f_8, f_9\}$.

مجموعه بسته است.

اثبات الف) از گزاره (۱۶-۱)

ب) با استفاده از قسمت (الف) به این دلیل که f_7 توسط f_8 و f_9 قابل بیان است، f_8 نیز توسط f_7 و f_9 قابل بیان است و نهایتاً f_8 و f_9 هر دو توسط f_7 و f_9 قابل بیان است.



تمرین ۱-۱۵ الف) به شکل صحیح نشان دهید که f_7 توسط ترکیبی از f_8 و f_9 قابل بیان است.
ب) به شکل صحیح نشان دهید که f_8 و f_9 هر دو با ترکیبی از f_7 و f_9 قابل بیان هستند.

وارداد ۱۹-۱ وقتی می‌گوییم $\{f_7, f_8\}$ مجموعه بسته از رابط‌ها مطلق است منظور ما این است

که $\{f_7, f_8\}$ مجموعه بسته از توابع ارزش است.

سؤال ۲۰-۱ الف) آیا $\{1\}$ به تنهایی بسته است؟

ب) آیا $\{1\}$ ~ ~ ~ ؟

ج) آیا $\{1\}$ ~ ~ ~ ؟

د) آیا $\{ \rightarrow \}$ ~ ~ ~ ؟

NAND

NOR

P_1	P_2	$P_1 \downarrow P_2$	$\neg(P_1 \wedge P_2)$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T

P_1	P_2	$P_1 \downarrow P_2$	$\neg(P_1 \vee P_2)$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

بارداری ۲۱-۱

گزاره ۱-۲۲: تنها رابط‌های منطقی دو منظقی که به تنهایی بسنده هستند NAND و NOR هستند.

اثبات: قدم اول: $\neg$ و $\wedge$ جوک به تنهایی بسنده هستند. به راحتی دیده می شود که

$$\alpha | \alpha \quad \text{مقابل با} \quad \neg \alpha \quad \text{است زیرا} \quad \neg \alpha \iff (\alpha | \alpha)$$

یک توتولوژی است چنانچه در جدول زیر قابل مشاهده است:

α	$\neg \alpha$	$\alpha \alpha$	✓
T	F	F	
F	T	T	

$\neg(\alpha \wedge \beta) \iff \alpha | \beta$ (توتولوژی)
 $\neg(\alpha | \beta) \iff (\alpha \wedge \beta)$
 $(\alpha | \beta) | (\alpha | \beta)$

همچنین با توجه به این واقعیت که $\alpha | \beta$ مقابل با $\neg(\alpha \wedge \beta)$ است، نتیجه می گیریم

که $\alpha \wedge \beta$ هم مقابل با $\neg(\alpha | \beta)$ است، اما از آنجا که $\neg$ را توانستیم با NAND بیان کنیم نتیجه می گیریم که $\alpha \wedge \beta$ باید با $(\alpha | \beta) | (\alpha | \beta)$ مقابل باشد. همانطور که جدول زیر هم این مسئله را نشان می دهد:

α	β	$\alpha \beta$	$(\alpha \beta) (\alpha \beta)$	$\alpha \wedge \beta$
T	T	F	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	T	F	F

پس $(\alpha | \beta) | (\alpha | \beta) \iff \alpha \wedge \beta$ یک توتولوژی است.

حال، بنابر نتیجه (۱۸-۱) می دانیم که مجموعه $\{\neg, \wedge\}$ بسنده است و به این علت که

توانستیم $\neg$ و $\wedge$ را با استفاده از NAND بیان کنیم نتیجه می گیریم که

رابط NAND به تنهایی بسنده است.

تمرین ۵-۲ ثابت کنید رابط NOR به تنهایی بسنده است.

قدم اول

قدم دوم: تنها رابط‌های دوپای بسنده، NAND، NOR هستند.

به اثبات این مطلب فرض می‌کنیم که رابط دوپای مثل $*$ هست که بسنده است و ثابت می‌کنیم که $*$ نمی‌تواند چیزی به جز NAND یا NOR باشد.

P_1	P_2	$P_1 * P_2$
T	T	? F
→ T	F	? T
→ F	T	? F
F	F	? T

اولاً: این رابط دوپای باید قادر باشد $\neg p$

را تولید کند و یا به عبارت دیگر $p * p$

باید معادل با $\neg p$ باشد. بنابراین باید داشته باشیم

$$\begin{cases} f_*(T, T) = F \\ f_*(F, F) = T \end{cases}$$



ارغای باید داشته باشیم:

$$f_*(T, F) = f_*(F, T)$$

اثبات افعال فرض کنید چنین باشد.

$$f_*(T, F) = \underline{\underline{T}}^F, \quad f_*(F, T) = \underline{\underline{F}}^T$$

در عنوان مثال داشته باشیم

در این صورت، $\alpha * \beta$ یا $\neg \beta$ معادل خواهد بود و بسنده بودن $*$ ، بسنده بودن

را به همراه خواهد آورد. اما، نمی‌تواند به تنهایی بسنده باشد زیرا تنها توابع یک‌صفتی که تولید می‌کند خود در نقیض و همانی است:

p	p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$	...
T	T	F	T	F	
F	F	T	T	F	

و به عنوان مثال، توان تولید تابع ثابت T یا تولیدی را ندارد.
(و همچنین توان تولید آن تولیدی را ندارد)

p	تولیدی	آنتی تولیدی
T	T	F
F	T	F

پس حالت $f_*(T, F) = T$, $f_*(F, T) = F$

نمی تواند اتفاق بیفتد.

به طریق مشابه می توان دید که اگر داشته باشیم $f_*(T, F) = F$, $f_*(F, T) = T$

آنگاه $\alpha * \beta$ با $\neg \alpha$ معادل خواهد بود و استدلال مشابهی نشان خواهد داد که

این حالت نیز نمی تواند اتفاق بیفتد

□ (ادعا)

بنابر ادعای بالا، تنها دو حالت باقی خواهد ماند

$$① f_*(T, F) = f_*(F, T) = \underline{T}$$

$$② f_*(T, F) = f_*(F, T) = \underline{F}$$

اما، در حالت ①، رابطه $*$ همان $NAND$ و در حالت ② همان NOR خواهد بود.

□

تمرین ۳-۵. نشان دهید که مجموعه $\{ \neg, \vee \}$ بسته است.

$$(p \vee q) \rightarrow \neg r$$

تمرین ۴-۵. تابع ارزش به موضوعی f را معادل بازنویس
در نظر بگیرید. نشان دهید f بسته است.

تمرین ۵-۵. نشان دهید که $p \vee q$ را می توان تنها با استفاده از $\rightarrow$ تولید کرد.

تمرین ۶-۵. نشان دهید که $p \leftrightarrow q$ را نمی توان تنها با استفاده از $\rightarrow$ تولید کرد.

بخش ۳: ساختار نحوی منطق گزاره‌ها (The Syntax of the Propositional Logic) deduction system

زبان منطق گزاره‌ها شامل
۱. بی‌نیامی‌ها: گزاره‌ها یا گزاره‌های اتمی
 $P_1, P_2, P_3, \dots$
۲. رابط‌ها یا گزاره‌پیوندهای منطق
 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
Connectives

۳. پرانتزهای چپ و راست ()

هدف:

ارائه دستاویزهای مجموعه اصول مرسومه و قواعد استنتاج به نحوی که
(deduction rules) (axioms)

۱. هیچ چیزی غیر از توتولوژی‌ها را اثبات نلزد (دستاویز دارا صحت (soundness) باشد)
۲. سازگار باشد.

۳. به علاوه، هر توتولوژی در این دستاویز قابل اثبات باشد (دستاویز کامل یا تمام (complete) باشد)

مجموعه اصول دستاویز استنتاجی منطق گزاره‌ها:

- (I)
- 1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
 - 2) $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
 - 3) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

- (II)
- 1) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$
 - 2) $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$
 - 3) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma))$

- (III)
- 1) $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
 - 2) $\beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
 - 3) $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma))$.

- (IV)
- 1) $(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
 - 2) $(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
 - 3) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta))$.

- (V)
- 1) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg \alpha)$.
 - 2) $\alpha \rightarrow \neg \neg \alpha$.
 - 3) $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$.

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta} \quad \begin{array}{l} \text{قاعده برها وضعی یا «وضع مقدم»} \\ \text{Modus Ponens (MP)} \end{array} \quad \text{قاعده استنتاج:}$$

با جایگزین کردن اصل (V3) با اصل زیر که آن را با Int نام می‌دهیم، استفاده استنتاجی «منطوق» مورد نیاز، intuitionistic logic بدست می‌آید:

$$(\text{Int}): \quad \neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta).$$

تعریف (۳۱): فرمول α را قابل اثبات می‌نامند، هرگاه دنباله استنتاجی از فرمول‌ها مانند

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

وجود داشته باشد که $\alpha_n = \alpha$ و به ازای هر $i \in \{1, \dots, n\}$ ، فرمول α_i یا نمونه از یک اصل موضوع باشد و یا با استفاده از MP از فرمول‌های قبلی بدست آمده باشد.

در این صورت می‌نویسیم

$$\vdash \alpha$$

و $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ را اثبات می‌نامیم.

①

$$\vdash \alpha \rightarrow \alpha$$

 $(\alpha \rightarrow \alpha) \vdash \alpha$

$$1. \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \quad \text{I1}$$

$$2. (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \quad \text{I2}$$

$$3. \alpha \rightarrow \alpha \quad 1, 2, \text{MP}$$

②

$$\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \wedge \alpha$$

$$1. \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha \quad \text{II1}$$

$$2. \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \quad \text{II2}$$

$$3. (\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \wedge \alpha)) \quad \text{II3}$$

$$4. (\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \wedge \alpha) \quad 2, 3, \text{MP}$$

$$5. \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \wedge \alpha \quad 1, 4, \text{MP}$$

$$(\theta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\theta \rightarrow \gamma') \rightarrow (\theta \rightarrow \gamma \wedge \gamma'))$$



③

$$\vdash \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \beta \wedge \alpha$$

$$1. \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha \quad \text{II1}$$

$$2. \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \quad \text{II2}$$

$$3. (\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \wedge \alpha)) \quad \text{II3}$$

$$4. (\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \wedge \alpha) \quad 2, 3, \text{MP}$$

$$5. \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \wedge \alpha \quad 1, 4, \text{MP}$$

$$6. \beta \wedge \alpha \rightarrow \beta \quad \text{II1}$$

$$7. \beta \wedge \alpha \rightarrow \alpha \quad \text{II2}$$

$$8. (\beta \wedge \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\beta \wedge \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \wedge \alpha \rightarrow \alpha \wedge \beta)) \quad \text{II3}$$

$$9. (\beta \wedge \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \wedge \alpha \rightarrow \alpha \wedge \beta) \quad 7, 8, \text{MP}$$

$$10. \beta \wedge \alpha \rightarrow \alpha \wedge \beta \quad 6, 9, \text{MP}$$

$$11. (\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \wedge \alpha) \rightarrow ((\beta \wedge \alpha \rightarrow \alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \beta \wedge \alpha)) \quad \text{IV3}$$

$$12. (\beta \wedge \alpha \rightarrow \alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \beta \wedge \alpha) \quad 5, 11, \text{MP}$$

$$13. \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \beta \wedge \alpha \quad 10, 12, \text{MP}$$

 $\alpha \wedge \beta$

(۳۳) تعریف فرض کنیم Γ مجموعه از فرمول‌ها باشد، α فرمول دلخواه.
می‌گوییم Γ فرمول α را اثبات می‌کند و می‌نویسیم

#۱۳

$$\Gamma \vdash \alpha$$

هنگامی که دنباله متناهی از فرمول‌ها مانند $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که

$$\alpha_n = \alpha \quad (1)$$

(۲) هر α_i یا نمونه از اصول موضوعه باشد یا معنوی از Γ و یا از فرمول‌های قبلی
با استفاده از MP بدست آمده باشد.

در این صورت Γ را مجموعه مفروضات می‌نامیم.
hypotheses

(۳۴) مثال

$$(1) \Gamma = \{ \alpha, \alpha \rightarrow \beta \}, \Gamma \vdash \beta.$$

1. α hyp.
2. $\alpha \rightarrow \beta$ hyp.
3. β 1, 2, MP

$$(2) \Gamma = \{ \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma, \alpha \}, \Gamma \vdash \gamma$$

1. $\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma$ hyp.
2. $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$ $\text{III}1$
3. $(\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta) \rightarrow ((\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ $I3$
4. $(\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ 2, 3, MP
5. $\alpha \rightarrow \gamma$ 1, 5, MP
6. α hyp.
7. γ 5, 6, MP.

معرفی قواعد جدید

(۳-۵) گزاره - قواعد استنتاجی زیر در استقلا، منطق گزاره ها برقرارند.
(لحن در اثبات فرمول مثل α از قواعد زیر نیز مانند MP می توانیم استفاده کنیم)

(الف) $\frac{\alpha}{\beta \rightarrow \alpha}$ دارندگی و برزندگی

(ب) $\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}$ رتق

(ج) $\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$ فتق

(د) $\frac{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$ قیاس زنجیری

(ه) $\frac{\alpha \leftrightarrow \beta, \beta \leftrightarrow \gamma}{\alpha \leftrightarrow \gamma}$ هم ارزها زنجیری

(و) $\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\neg \beta \rightarrow \neg \alpha}$ عکس نقض

(ز) $\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \rightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \gamma}$ به خاطر

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \alpha$
هر α_i یا نمونه از یک اصل موضوع است
و یا از فرمول ها قبلی از MP یا یکی از قواعد
زیر به دست آمده است.

اثبات (الف) عبارت $\frac{\alpha}{\beta \rightarrow \alpha}$ به معنای $\{\alpha\} \vdash \beta \rightarrow \alpha$

1. α hyp.

2. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ I1

3. $\beta \rightarrow \alpha$ 1, 2, MP.

(ب) $\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$

1. $(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \wedge \beta))$ I3

2. $\alpha \rightarrow \alpha$ مثال (۳-۲) قسمت (۱)

3. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \wedge \beta)$ 1, 2, MP

4. $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ I1

5. β hyp.

$$6. \alpha \rightarrow \beta$$

4, 5, MP

$$7. \alpha \rightarrow \alpha \wedge \beta$$

3, 6, MP

$$8. \alpha$$

hyp.

$$9. \alpha \wedge \beta$$

7, 8, MP.

$$\alpha \wedge \beta \vdash \beta$$

$$\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$$

(7-)

$$7. \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$$

II1

$$2. \alpha \wedge \beta$$

hyp.

$$3. \alpha$$

1, 2, MP.

اثبات $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ شبیه به این استدلال خواهد بود.

$$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma \quad (2)$$

$$1. (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

II3

$$2. \alpha \rightarrow \beta$$

hyp.

$$3. (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

1, 2, MP.

$$4. \beta \rightarrow \gamma$$

hyp.

$$5. \alpha \rightarrow \gamma$$

3, 4, MP.

تمرین (۱-۱۳) قسمت های (ه)، (و) و (ز) از گزاره (۵-۳)، اثبات کنید.



گزاره ۳-۶. فرض کنید Γ مجموعه از فرمول‌ها با این خاصیت باشد که به ازای فرمولی چون α داشته باشیم $\Gamma \vdash \alpha$ و $\Gamma \vdash \neg \alpha$. آنگاه به ازای هر فرمولی چون β خواهیم داشت:

$$\Gamma \vdash \beta.$$

اثبات. فرض کنید $\alpha_1, \dots, \alpha_n = \alpha$ و $\beta_1, \dots, \beta_m = \neg \alpha$ به ترتیب اثبات‌ها α و $\neg \alpha$ باشند. با افزودن Γ باشند.

(1). α_1	
(2). α_2	$1' = (n+m+1). \alpha \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \alpha) \quad \text{I1}$
$\vdots$	
$\rightarrow (n). \alpha$	$2' = (n+m+2). \neg \beta \rightarrow \alpha \quad n, 1', \text{MP.}$
$(n+1). \beta_1$	$3'. (\neg \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\neg \alpha \rightarrow \neg \neg \beta) \quad \text{I1}$
$(n+2). \beta_2$	$4'. \neg \alpha \rightarrow \neg \neg \beta \quad 2', 3', \text{MP}$
$\vdots$	
$\rightarrow (n+m). \neg \alpha$	$5'. \neg \neg \beta \quad (n+m), 4', \text{MP}$
	$6'. \neg \neg \beta \rightarrow \beta \quad \text{I3}$
	$7'. \beta \quad 5', 6', \text{MP.}$

در نتیجه خواهیم داشت $\Gamma \vdash \beta$

تعریف ۳-۷. (۱) مجموعه از فرمول‌ها را یک نظریه (theory) می‌نامیم.

(۲) یک نظریه را به لحاظ نحوی سازگار می‌نامیم هرگاه هیچ فرمولی مانند α یافت نشود (Syntactically Consistent)

که آن نظریه هم α و هم $\neg \alpha$ را اثبات کند. در غیر این صورت، آن نظریه را

به لحاظ نحوی ناسازگار یا متناقض می‌نامیم.
(S. contradictory) (S. inconsistent)

تذکره ۳-۸. یک معنای گزاره فوق این است: در صورتی که یک نظریه (یا به طور کلی یک سیستم فکری - علمی - فلسفی) ناسازگار باشد، تمیز آسانی خودش را از درست می‌دهد؛ به این معنای که از منظر آن نظریه

هر چیزی قابل اثبات است!

تمرین (۲-۱۳). ثابت کنید

الف) $\alpha \leftrightarrow \alpha', \beta \leftrightarrow \beta' \vdash \alpha \vee \beta \leftrightarrow \alpha' \vee \beta'$

ب) $\Sigma \vdash \alpha \Rightarrow \Sigma \cup \{\neg \alpha\}$ ناسازگاری

ج) $\Sigma \vdash \neg \alpha \Rightarrow \Sigma \cup \{\alpha\}$ ناسازگاری

#۱۴

قضیه ۳-۹ [قضیه استنتاج Deduction Theorem]

(فراقضیه)

فرض کنید Σ یک نظریه، α و β دو فرمول باشند به نحوی که

$$\Sigma, \alpha \vdash \beta$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

اثبات: فرض کنید $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n = \beta$ یک اثبات با مفروضات $\Sigma \cup \{\alpha\}$ باشد

باشد. با استقراء روی n ، ثابت می‌کنیم که به ازای هر β_i ($1 \leq i \leq n$) داریم:

$$\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_i$$

حالت $i=1$:

بنا بر تعریف اثبات، به حالت زیر می‌رسیم β_1 قابل تصورات:

حالت ۱: $\beta_1 \in \Sigma$

1. β_1 hyp

2. $\beta_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_1)$ I1

3. $\alpha \rightarrow \beta_1$ 1, 2, MP

$$\Rightarrow \Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_1$$

حالت ۲: $\beta_1 = \alpha$

1. $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ I1

2. $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ I2

3. $\alpha \rightarrow \alpha$ 1, 2, MP.

$\Rightarrow \vdash \alpha \rightarrow \alpha$ (شبهه بنال (۳۲))

که طبقاً نتیجه می‌دهد $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \alpha$ که همان $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_1$ است.

حالت ۳: β_1 نمونه از یک اصل موضوعی باشد که در این صورت داریم:

1. β_1 (نمونه از یکی از اصول موضوعه)

2. $\beta_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_1)$ I1

3. $\alpha \rightarrow \beta_1$ 1, 2, MP

$\Rightarrow \vdash \alpha \rightarrow \beta_1 \Rightarrow \Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_1$

حالت $i \geq 2$: چهار حالت داریم: $\beta_i \in \Sigma$ ۱. $\beta_i = \alpha$ ۲. $\beta_i \rightarrow \alpha$ ۳. β_i نمونه از یک اصل موضوعی باشد و β_i از فرمول‌های قبلی با استفاده از MP بدست آمده باشد.

در حالت اول، شبهه به حالت $i=1$ می‌توانیم ثابت کنیم که

$\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_i$

در حالت ۲: فرمول‌ها به شکل β_k, β_j ($i < j < k$) وجود دارند که $\beta_k \rightarrow \beta_j$ به شکل $\beta_j \rightarrow \beta_i$ است.

طبق فرض استقرا، داریم $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_k$ و $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_j$.

$\vdots$
(n). $\alpha \rightarrow \beta_j$

$\vdots$
(m). $\alpha \rightarrow (\beta_j \rightarrow \beta_i)$

(m+1). $\alpha \rightarrow \beta_i$ قاعده بنایطری n, m

قاعده بنایطری (۳۵)

$$\frac{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \rightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

$\Rightarrow \Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_i$

بنابراین، استقراء با موفقیت به پایان می‌رسد و حالت $n = 1$ مطلوب قضیه است. یعنی

$$\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta.$$

□

نیمه ۱۰-۳ به ازای هر نظریه Σ و هر دو فرمول α و β داریم

$$\Sigma, \alpha \vdash \beta \iff \Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

اثبات $(\Rightarrow)$ محتوای قضیه استنتاج است.

$(\Leftarrow)$.

با استدلالی در Σ

$$(n) \cdot \alpha \rightarrow \beta$$

$$(n+1) \cdot \alpha \quad \text{hyp.}$$

$$(n+2) \cdot \beta \quad n, n+1, \text{MP}$$

$$\Rightarrow \Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \quad \square$$

تعریف ۱۱-۳. ماغای به زبان اضافه می‌کنیم به شکل $\perp$ که آن را falsum یا تناقض خوانند.

می‌توانستیم یکی از اصول موضوعه را انتخاب کنیم و $\perp$ را برابر با نقیض آن بگیریم.

و من گنجه که آن اصل باشد و $\perp$ نقیض α در این صورت یک فرمول دلخواه α داریم:

$$1. \alpha \quad (\text{اصل موضوعه})$$

① با $\perp$ مانند یک فرمول خوش خست برخورد می‌کنیم!

$$2. \alpha \rightarrow (\neg \alpha \rightarrow \alpha) \quad \text{I1}$$

② پس به ازای هر فرمول α داریم

$$3. \neg \alpha \rightarrow \alpha \quad 1, 2, \text{MP}$$

$$\vdash \perp \rightarrow \alpha$$

$$4. \neg \alpha \rightarrow \neg \neg \alpha \quad 3, \text{عکس و نقیض}$$

$$5. \neg \neg \alpha \rightarrow \alpha \quad \text{I3}$$

$$\vdash \neg \perp.$$

$$6. \neg \alpha \rightarrow \alpha \quad 4, 5, \text{قیاس زنجیری}$$

③ همچنین

د گزاره زیر چند قاعده جدید به دست می آوریم :

گزاره ۱۲-۳ \ (الف) اگر داشته باشیم $\Sigma \vdash \alpha \vdash \beta$ آنگاه خواهیم داشت $\Sigma \vdash \beta$.

(ب) از $\Sigma \vdash \perp$ نتیجه می گیریم $\Sigma \vdash \neg \alpha$ (برهان خلف)

(ج) فصل یا (Detachment Rule)

$$\frac{\neg \alpha \vee \beta, \alpha}{\beta}$$

(د)

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \alpha', \beta \leftrightarrow \beta'}{\alpha * \beta \leftrightarrow \alpha' * \beta'}$$

$* \in \{ \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$

و یا

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \alpha', \beta \leftrightarrow \beta', \alpha * \beta}{\alpha' * \beta'}$$

اثبات \ (الف) از قضیه استنتاج (DT) می توانیم از $\Sigma \vdash \alpha \vdash \beta$ نتیجه بگیریم

(*) $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

از قاعده عکس و نقیض خواهیم داشت $\Sigma \vdash \neg \beta \rightarrow \neg \alpha$ و بنابر نتیجه قضیه استنتاج خواهیم داشت:

$\Sigma, \neg \beta \vdash \neg \alpha$ □

(ب) از فرض $\Sigma \vdash \perp$ بنابر (DT) خواهیم داشت

$\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \perp$

از عکس و نقیض نتیجه می گیریم که

(*)_۱ $\Sigma \vdash \neg \perp \rightarrow \neg \alpha$

از طرفی طبق تعریف $\perp$ داریم $\vdash \neg \perp$ و در نتیجه $\sum \vdash \neg \perp$ (*)₂
 بنابراین، با استفاده از مفروضات $\sum$ به شکل زیر خواهیم داشت:

$$1. \neg \perp \rightarrow \neg \alpha \quad (*)_1$$

$$2. \neg \perp \quad (*)_2$$

$$3. \neg \alpha \quad 1, 2, MP \rightarrow \sum \vdash \neg \alpha \quad \square$$

* از نتایج قسمت (ب) این است که از $\alpha \vdash \perp$ خواهیم داشت $\vdash \neg \alpha$.

(ج) برای اثبات این قسمت ابتدا نشان می‌دهیم که به ازای هر دو فرمول α, β داریم:

$$\vdash \neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \quad (*).$$

می‌توانیم از DT استفاده کنیم و به جای آن نشان دهیم که $\neg \alpha, \alpha \vdash \beta$.

قرار دهیم $\Gamma = \{\neg \alpha, \alpha\}$ پس خواهیم داشت $\Gamma \vdash \neg \alpha, \Gamma \vdash \alpha$.

طبق گزاره (۳-۶) به ازای هر فرمول مانند β داریم

$$\Gamma \vdash \beta$$

پس $\neg \alpha, \alpha \vdash \beta$ با استفاده از DT داریم $\neg \alpha \vdash \alpha \rightarrow \beta$ ، با استفاده مجدد از

$$\vdash \neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \quad (DT) \text{ بدست می‌آوریم}$$

$$1. \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \quad (I1)$$

$$2. \neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \quad (*)$$

$$3. (\neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg \alpha \vee \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta))) \quad (II\ 3)$$

$$4. (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg \alpha \vee \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \quad 2, 3, MP.$$

$$5. \neg \alpha \vee \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \quad 1, 4, MP$$

$$6. \neg \alpha \vee \beta \quad hyp(\Sigma)$$

$$7. \alpha \rightarrow \beta$$

5, 6, MP.

$$8. \alpha$$

hyp (Σ)

$$9. \beta$$

7, 8, MP.

$\Downarrow$

$$\neg \alpha \vee \beta, \alpha \vdash \beta \quad \square$$

(د) فرض كنيد $*$ ، شرطی ($\rightarrow$) باشد. می خواهیم نشان دهیم
 $\alpha \leftrightarrow \alpha', \beta \leftrightarrow \beta', \alpha \rightarrow \beta \vdash \alpha' \rightarrow \beta'$

$$1. (\alpha \leftrightarrow \alpha') \rightarrow (\alpha' \rightarrow \alpha) \quad (\text{IV } 2)$$

$$2. \alpha \rightarrow \alpha' \quad \text{hyp.}$$

$$3. \alpha' \rightarrow \alpha \quad 1, 2, \text{MP.}$$

$$4. \alpha \rightarrow \beta \quad \text{hyp.}$$

$$5. \alpha' \rightarrow \beta \quad 3, 4, \text{قیاس برعکس}$$

$$6. (\beta \leftrightarrow \beta') \rightarrow (\beta \rightarrow \beta') \quad (\text{IV } 2)$$

$$7. \beta \leftrightarrow \beta' \quad \text{hyp.}$$

$$8. \beta \rightarrow \beta' \quad 6, 7, \text{MP.}$$

$$9. \alpha' \rightarrow \beta' \quad 5, 8, \text{قیاس برعکس}$$

حالات $\ast \in \{\vee, \wedge, \leftrightarrow\}$ به عنوان تمرین.



نعم ۱۳-۳: به ازاء هر دو فرمول α و β داریم:

الف) $\vdash \neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

ب) $\vdash \alpha \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg (\alpha \rightarrow \beta))$

ج) $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$

اثبات الف) نظریه $\Sigma = \{\alpha, \neg \alpha\}$ را در نظر بگیرید. بدیهیات که داریم

$\Sigma \vdash \alpha$, $\Sigma \vdash \neg \alpha$

بنابر گزاره (۳-۴)، Σ هر فرمولی را اثبات می کند، به ویژه $\Sigma \vdash \beta$.

یعنی، $\neg \alpha, \alpha \vdash \beta$

با یک بار استفاده از (PT) داریم $\neg \alpha \vdash \alpha \rightarrow \beta$ و با استفاده مجدد از (PT) بدست می آوریم

$\vdash \neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

ب) قرار دهیم $\Sigma = \{\alpha, \neg \beta\}$. ابتدا نشان می دهیم که

$\Sigma, \alpha \rightarrow \beta \vdash \perp$

1. α hyp.

2. $\alpha \rightarrow \beta$ hyp.

3. β $\Rightarrow \Sigma, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$ 1,2,MP

از طرفی $\Sigma \vdash \neg \beta$ پس بنابر گزاره (۳-۴)، نظریه $\Sigma \cup \{\alpha \rightarrow \beta\}$ هر فرمولی را اثبات می کند، من جمله داریم:

$\Sigma, \alpha \rightarrow \beta \vdash \perp$

بنا بر بھان خلف (فکت (ب) از گزارہ (۱۲-۳) خواصم داشت

$$\Sigma \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$$

حال با دوبار استفادہ از (DT) خواصم داشت

$$\vdash \alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta))$$

(ج) قرار دھد $\Sigma = \{\alpha \rightarrow \beta, \neg\alpha \rightarrow \beta\}$ مانان می دھم

$$\Sigma, \neg\beta \vdash \perp$$

$$1. \neg\beta \quad \text{hyp.}$$

$$2. \alpha \rightarrow \beta \quad \text{hyp.}$$

$$3. \neg\alpha \rightarrow \beta \quad \text{hyp.}$$

$$4. \neg\beta \rightarrow \neg\alpha \quad 1, 2, \text{عکس و نقیض}$$

$$5. \neg\beta \rightarrow \neg\neg\alpha \quad 3, 4, \text{عکس و نقیض}$$

$$6. \neg\alpha \quad 1, 5, \text{MP}$$

$$7. \neg\neg\alpha \quad 1, 6, \text{MP}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Sigma, \neg\beta \vdash \neg\alpha \\ , \\ \Sigma, \neg\beta \vdash \neg\neg\alpha \end{cases}$$

پس بنا بر گزارہ (۴-۳) خواصم داشت

$$\Sigma, \neg\beta \vdash \perp$$

حال، بنا بر بھان خلف خواصم داشت

$$\Sigma \vdash \neg\neg\beta \quad (*),$$

(ما بنا بر اصل (V3) داریم

$$\vdash \neg\neg\beta \rightarrow \beta \quad (*),$$

و با استفاده از قیاس زنجیری و (x_1) و (x_2) خواصم را ست

$$\Sigma \vdash \beta$$

حال با دوبار استفاده از (DT) نتیجه می گیریم

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$$



قضایا صحت و بامیت

قضیه ۳-۱۴ [قضیه صحت (Soundness Theorem)]

هر قضیه از منطق گزاره‌ها یک توتولوژی است.

اثبات: فرض کنید θ قضیه‌ای از منطق گزاره‌ها باشد؛ یعنی $\vdash \theta$ ، باین را در ابتدا باطلی مانند n است. قضیه را با استقراء روی n اثبات می‌کنیم.

$n=1$: در این حالت، θ نمونه از یک اصل موضوع خواهد بود.

پس در این حالت باید ثابت کنیم که همی اصول موضوعه توتولوژی هستند.

$$(I1): \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$\begin{array}{cc} F & \\ T & F \\ & T \quad F \\ & & F \\ & & & X \end{array}$$

$$(I2): \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

$$\begin{array}{ccc} F & & \\ T & T & F \\ & T & F \\ & & T \quad F \end{array}$$

:

$$(IV 3): (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta))$$

$$\begin{array}{ccc} F & & \\ T & & F \\ & T & F \\ & & F \end{array}$$

...

$$v(\alpha) = T, v(\beta) = F \Rightarrow v(\beta \rightarrow \alpha) = F \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow v(\alpha) = F, v(\alpha) = T \Rightarrow v(\alpha \rightarrow \beta) = F \quad \checkmark$$

$n \geq 2$: فرض کنید $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n = \theta$ جمله‌های θ باشد. اولاً دقت کنید که به ازای هر $i < n$

داریم $\vdash \theta_i$ زیرا دنباله $\theta_1, \dots, \theta_i$ عملاً ابتدا θ_i است.

پس باین فرض استقراء خواهیم داشت $\vdash \theta_i$

از طرفی θ ، دو حالت قابل تصورات. اینکه θ نمونه از یک اصل موضوعه باشد و اینکه θ از فرمول‌های قبلی با استفاده از MP بدست آمده باشد.

حالت اول شبیه به حالت $n=1$ خواهد بود.

بنابراین باید ثابت کنیم که به ازای هر دو فرمولی مانند α و β اگر $\alpha \rightarrow \beta$ ، توئولوژی باشند آنگاه β نیز یک توئولوژی خواهد بود. (یعنی MP، توئولوژی بودن را حفظ می‌کند)

اما، این مطلب دقیقاً محتوای گزاره ۱۵-۱۱ در بخش اول است.



قضیه ۱۵-۳ [قضیه صحت تعمیم یافته]

به ازای هر نظریه Σ و فرمول α داریم

$$\Sigma \vdash \alpha \Rightarrow \Sigma \models \alpha$$

اثبات تمرین (۱۵-۱) قضیه صحت تعمیم یافته را ثابت کنید.



لم ۱۶-۳: فرمول داده شده α را در نظر بگیرید و فرض کنید $p_1, \dots, p_k$ فرمول‌های اتمی ظاهر شده در α باشند. همچنین فرض کنید $\{T, F\}^k = \{v_1, \dots, v_k\}$ یک ارزش دهی باشد. متناظر با ارزش دهی v فرمول α' را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\alpha' \equiv \begin{cases} \alpha & , \quad f_{\alpha}(v_1, \dots, v_k) = T \\ \neg \alpha & , \quad f_{\alpha}(v_1, \dots, v_k) = F \end{cases}$$

همچنین، فرمول‌های $p'_1, \dots, p'_k$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$p'_i \equiv \begin{cases} p_i & , \quad v_i = T \\ \neg p_i & , \quad v_i = F. \end{cases} \quad i \in \{1, \dots, k\}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$p'_1, \dots, p'_k \vdash \alpha'.$$

P_1	P_2	P_3	$\dots$	P_k	α	α'	P'_1	P'_2	P'_3	$\dots$	P'_k
T	T	T		T	T	α	P_1	P_2	P_3		P_k
		$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
T	F	F	$\dots$	F	T	α	P_1	$\neg P_2$	$\neg P_3$	$\dots$	$\neg P_k$
		$\vdots$			F	$\neg \alpha$					
		$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$					
F	F	F	$\dots$	F	F	$\neg \alpha$	$\neg P_1$	$\neg P_2$	$\neg P_3$	$\dots$	$\neg P_k$

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم که فرمول α تنها شامل گزاره‌پیوندهای $\neg$ و $\rightarrow$ است.

حکم را با استقراء روی تعداد گزاره‌پیوندهای $\neg$ و $\rightarrow$ که در α ظاهر شده‌اند اثبات می‌کنیم.
این عدد را با $C(\alpha)$ نمایش می‌دهیم.

$C(\alpha) = 0$: در این صورت α خود یک فرمول اتمی مثل P_1 است و α چیزی به جزء P_1 نیست. از طرفی ما به ازای هر فرمول مانند β ثابت کردیم که

$$\beta \vdash \beta$$

$$P'_1 \vdash \alpha'$$

پس به‌دوره خواهیم داشت

#۱۶

$C(\alpha) \geq 1$: در این صورت حالات زیر می‌تواند اتفاق بیفتد:

حالت ۱: α به شکل $\neg \beta$ باشد. به این علت که $C(\beta) = C(\alpha) - 1$ ، بنا بر فرض

استقراء خواهیم داشت

$$P'_1, \dots, P'_k \vdash \beta' \quad (*)$$

وقت بسند که فرمول‌های اتمی ظاهر شده در α و β یکسان هستند.

$$\begin{aligned} \text{از طرفی } f_{\alpha}(\bar{a}) \neq f_{\beta}(\bar{a}) \text{ یعنی} \\ \underline{1-1}: f_{\alpha}(\bar{a}) = T, f_{\beta}(\bar{a}) = F \\ \underline{1-2}: f_{\alpha}(\bar{a}) = F, f_{\beta}(\bar{a}) = T \end{aligned}$$

حالت ۱-۱: α همان α و β برابر با $\neg\beta$ خواهد بود. حال، بنابر (*) داریم

$$p'_1, \dots, p'_k \vdash \neg\beta$$

اما، $\neg\beta$ همان α و در نتیجه همان α است، پس خواهیم داشت

$$p'_1, \dots, p'_k \vdash \alpha$$

حالت ۱-۲: α برابر با $\neg\alpha$ و β همان β خواهد بود. بنابراین با فرضیات

$$\Sigma = \{p'_1, \dots, p'_k\} \text{ خواهیم داشت}$$

$$1. \beta \quad \beta \neq \neg\beta, (*)$$

$$2. \beta \rightarrow \neg\neg\beta \quad (\forall 3)$$

$$3. \neg\neg\beta \quad 1, 2, \text{ قیاس زنجیری}$$

$$\Rightarrow \Sigma \vdash \neg\neg\beta$$

اما $\neg\neg\beta$ همان α و $\neg\alpha$ است. پس

$$p'_1, \dots, p'_k \vdash \alpha$$

حالت ۲: α به شکل $\delta \rightarrow \beta$ است. در این حالت خواهیم داشت

$$C(\beta) < C(\alpha)$$

$$C(\delta') < C(\alpha).$$

پس بنابر فرض استقلا، خواهیم داشت

$$p'_1, \dots, p'_k \vdash \beta' \quad , \quad p'_1, \dots, p'_k \vdash \delta' \quad (*)$$

حالت ۲-۱ : $f_{\beta}(\bar{a}) = F$

در این حالت، خواهیم داشت $f_{\alpha}(\bar{a}) = T$ و بنابراین

$$\alpha' \models \alpha \quad \text{و} \quad \beta' \models \neg \beta$$

بنابر (*) داریم

$$p_1', \dots, p_k' \vdash \neg \beta \quad (1)$$

بنابر قسمت (الف) از سم (۳-۱۳) خواهیم داشت :

$$\vdash \neg \beta \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma') \quad (2)$$

پس از (۱) و (۲)، و قیاس زنجیری خواهیم داشت

$$p_1', \dots, p_k' \vdash \beta \rightarrow \gamma'$$

اما، $\beta \rightarrow \gamma$ همان α' است.

حالت ۲-۲ : $f_{\beta}(\bar{a}) = T$

در این حالت، $f_{\alpha}(\bar{a})$ برابر با T خواهد بود و در نتیجه خواهیم داشت

$$\alpha' \models \alpha \quad \text{و} \quad \gamma' \models \gamma.$$

بنابر (*) خواهیم داشت :

$$p_1', \dots, p_k' \vdash \gamma'$$

و بنابر قاعده دارندگی و برانندگی خواهیم داشت

$$\frac{p_1, \dots, p_k \vdash \underbrace{\beta \rightarrow \gamma}_{\alpha'}}{\gamma} \beta \rightarrow \gamma$$

حالت ۲-۳: $f_{\beta}(\bar{v}) = T$ و $f_{\gamma}(\bar{v}) = F$.

در این حالت، خواهیم داشت $f_{\alpha}(\bar{v}) = F$ و درستی

$$\alpha' \models \neg \alpha, \quad \beta' \models \beta, \quad \gamma' \models \neg \gamma.$$

بنابر (*) خواهیم داشت

$$p_1', \dots, p_k' \vdash \beta \quad , \quad p_1', \dots, p_k' \vdash \neg \gamma$$

قرار دهیم $\Sigma = \{p_1', \dots, p_k'\}$.

بنابر قسمت (ب) از لم (۳-۱۳) داریم

$$\vdash \beta \rightarrow (\neg \gamma \rightarrow \neg (\beta \rightarrow \gamma)) \quad (*)_1$$

حال، رفت‌سند که

$$1. \beta \rightarrow (\neg \gamma \rightarrow \neg (\beta \rightarrow \gamma)) \quad (*)_1$$

$$2. \beta \quad (\Sigma \vdash \beta \text{ داریم } (*))$$

$$3. \neg \gamma \quad (\Sigma \vdash \neg \gamma \text{ داریم } (*))$$

$$4. \neg \gamma \rightarrow \neg (\beta \rightarrow \gamma) \quad 1, 2, MP$$

$$5. \neg (\beta \rightarrow \gamma) \quad 3, 4, MP$$

$$\Rightarrow \Sigma \vdash \neg (\beta \rightarrow \gamma)$$

$$p_1, \dots, p_k \vdash \alpha'$$

و این همان چیزی است که به دنبالش بودیم، یعنی:



قضیه ۱۷-۳ [Completeness Theorem قضیه تمامیت]

هر توتولوژی در منطق گزاره‌ها قابل اثبات است.

اثبات: فرض کنید α یک توتولوژی و $p_1, \dots, p_k$ فرمول‌های اتمی ظاهر شده در α باشند. به ازای هر ارزش دهی مانند $\bar{v} = (v_1, \dots, v_k)$ به این گزاره‌ها

اتم، بنابر لم (۱۶-۳) داریم

$$p'_1, \dots, p'_k \vdash \alpha \quad (*)$$

(وقت کنید، به این علت که α یک توتولوژی است، α همواره با α خواهد بود)

از طرفی، ارزش دهی‌هایی مانند $\bar{w} = (w_1, \dots, w_k)$ و $\bar{v} = (v_1, \dots, v_k)$

وجود دارند که کاملاً برعکس داریم $v_k = T$ و $w_k = F$ و در نتیجه

p'_k کبر $\bar{v}$ همان p_k و کبر $\bar{w}$ $\neg p_k$ خواهد بود. پس بنابر (*)

$$\begin{cases} p'_1, \dots, p'_{k-1}, p_k \vdash \alpha \\ , \\ p'_1, \dots, p'_{k-1}, \neg p_k \vdash \alpha \end{cases} \text{خواهیم داشت:}$$

که با استفاده از (DT) نتیجه می‌رود

$$p'_1, \dots, p'_{k-1} \vdash p_k \rightarrow \alpha \quad (*_1)$$

,

$$p'_1, \dots, p'_{k-1} \vdash \neg p_k \rightarrow \alpha \quad (*_2)$$

از طرفی، بنابر قسمت (ج) از لم (۳-۳) داریم

$$\vdash (p_k \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\neg p_k \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \quad (*_3)$$

حال، وقت رسیدن که

$$1. p_k \rightarrow \alpha \quad (*_1)$$

$$2. \neg p_k \rightarrow \alpha \quad (*_2)$$

$$3. (p_k \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\neg p_k \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$$

$$4. (\neg p_k \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \quad 1, 3, MP$$

$$5. \alpha \quad 2, 4, MP$$

$$\Rightarrow p'_1, \dots, p'_{k-1} \vdash \alpha$$

با $(k-1)$ بار تکرار این روند خواهیم داشت

$$\vdash \alpha$$



یکی از نتایج بسیار مهم قضیه صحت سازگاری منطق گزاره‌هاست:
نتیجه ۳-۱۸. منطق گزاره‌ها به لحاظ تئوری سازگار است.

اثبات ۱. فرض کنیم انگونه نباشد. بنابر این فرضی مانند α وجود خواهد داشت که به آن داریم

$$\vdash \neg \alpha, \quad \vdash \alpha$$

بنابر قضیه صحت، خواهیم داشت $\models \alpha$ و $\models \neg \alpha$ ، یعنی

هم α توتولوژی خواهد بود و هم $\neg \alpha$ که غیر ممکن است



نتیجه ۱۴-۳. مجموعه قضایای منطقی گزاره‌ها تصمیم‌پذیر (decidable) است. (تصمیم‌پذیر)

اثبات. اگر T_0 را مجموعه همه قضایای منطقی گزاره‌ها بگیریم و

T_1 را مجموعه همه توتولوژی‌ها $\sim \sim$

اولاً، وقت کنید که T_0 و T_1 هر دو زیر مجموعه FORM هستند.

بنابر قضیه صحت داریم

$$T_0 \subseteq T_1$$

و بنابر قضیه تاسیت داریم

$$T_1 \subseteq T_0$$

و در نتیجه

$$T_0 = T_1. \quad (*)$$

از طرفی، با استفاده از جدول ارزش ما می‌توانیم به نحوی الگوریتمی مشخص کنیم

که آیا یک فرمول دلاست. توتولوژی هست یا نه.

در نتیجه T_1 مجموعه تصمیم‌پذیر است. و بنابر (*), T_0 هم مجموعه تصمیم‌پذیر است.

