

منطق ریاضی

جلد ۶

ما هدف از فرض کسبه که نمونه از زبان اصل توصیف است و α فرمولی در آن خواهد بود.

1. φ نمونه از اصل توصیف است

2. $\varphi \rightarrow (\neg \alpha \rightarrow \varphi)$ I1

3. $\neg \alpha \rightarrow \varphi$ 1, 2, MP

4. $\neg \varphi \rightarrow \neg \neg \alpha$ 3 و قاعده عکس و تقصیر

5. $\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha$ I3

6. $\neg \varphi \rightarrow \alpha$ قیاس زنجیری 4, 5

$$\boxed{\vdash \neg \varphi \rightarrow \alpha}$$

بنا بر استدلال
MP

$$\boxed{\{\neg \varphi\} \vdash \alpha}$$

$$\Sigma = \{\neg \varphi\}$$

راهی
از طرف دیگر

$$(\vdash \varphi)$$

$$\Sigma \vdash \varphi$$

$$\Sigma \vdash \neg \varphi$$

$$\boxed{\Sigma \vdash \alpha}$$

فرض
که زبان اصالتی نیست

falsum
bottom

$\perp$

عبارت همیشه نادرست شکل

$$(\perp \Rightarrow \neg \varphi)$$

و با آن به شکل یک فرمول خراب ختم بر خود می کنیم

p, q, r

عبارت برای داشتن تناقض در زبان

$$\boxed{\textcircled{1} \vdash \neg \perp}$$

$$\textcircled{2} \vdash \perp \rightarrow \alpha$$

(به ازای هر $\alpha \in \text{Form}$)

دقت کنید، به دلیل سه هدایت بالا، خواص زیر درباره $\perp$ برقرارند:

$$\dots \perp \leftrightarrow \alpha, \neg \perp, \perp \wedge \alpha, \alpha \rightarrow \perp$$

قضیه استنتاج (Deduction Theorem)

فرض کنید Σ یک نظریه و α, β دو فرمول خوش ساخته دلخواه باشند.

اگر داشته باشیم $\Sigma, \alpha \vdash \beta$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$\left(\underbrace{\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta}_{\text{توضیح: } \alpha \text{ فرض می‌شود}}, \underbrace{\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta}_{\text{نتیجه}} \right)$$

α hyp.

$\vdots$

β

$$\text{DT} \quad \Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

بر راحتی دیده می‌شود که

تکثیر α بر قضیه استنتاج برقرار است.

(*)

$$\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \Sigma, \alpha \vdash \beta$$

1. α hyp

2. $\alpha \rightarrow \beta$ (*)

3. β 1, 2, MP

$$\Rightarrow \Sigma, \alpha \vdash \beta \checkmark$$

$$\Sigma, \alpha \vdash \beta$$

اثبات فرض

$$\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

هدف

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \equiv \beta \quad \text{وجود دارد}$$

همه فرض، دنباله رشته فرمول‌ها مانند

که اثباتی تنها بر فرضیات $\Sigma \cup \{\alpha\}$ هر β است.

ارغمان به از هر $n \leq i$ داریم

$$\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_i$$

فرض کنیم به از هر $i < n$ داریم

$$\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_i$$

می‌خواهیم نشان دهیم که

$$\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_n$$

حالت ۱

$$\beta_1 \in \Sigma$$

حالت ۲

نمونه ارزش اصول β_1 بر مبنای Σ

1. β_1 hyp. (نمونه ارزش اصول بر مبنای Σ)

2. $\beta_1 \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta_1)$ I1

3. $\alpha \rightarrow \beta_1$ 1, 2, MP

$$\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_1$$

۱ = i: هرگز: $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_1$

حالت ۳

$$\beta_1 \Rightarrow \alpha \quad (\alpha \rightarrow \alpha)$$

مثال در یک گزاره، قبل از نتیجه گرفتن

که به ازای α داریم $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

پس $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \alpha$

1. $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ I1

2. $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ I2

3. $\alpha \rightarrow \alpha$ 1, 2, MP

$(j, k < i)$

نمونه وجود دارند که

β_i حاصل به کارگیری MP در β_j و β_k است

$$\frac{\beta_j \rightarrow \beta_k}{\beta_i} \text{ MP}$$

$$\beta_k \Rightarrow (\beta_j \rightarrow \beta_i)$$

حالت ۴:

۲ > i

از طریق اصل فرض استوار:

$$(1) \quad \Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_j$$

$$(2) \quad \Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_k$$

$$\Rightarrow \Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (n) \quad \alpha \rightarrow \beta_j \\ \vdots \\ (m) \quad \alpha \rightarrow \beta_k \Rightarrow \alpha \rightarrow (\beta_j \rightarrow \beta_i) \\ (m+1) \quad \alpha \rightarrow \beta_i \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ \\ n, m, (2) \text{ و نتیجه} \\ \text{(به خط)} \end{array}$$

استدلال با فرضیات Σ به هر $\alpha \rightarrow \beta_i$ است

$$\rightarrow \Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta_i$$

ارها

حالا، به قرار دادن $i = n$ خواهیم داشت: $\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta$



گزارش: این گزاره درست است: $\Sigma, \alpha \vdash \beta$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\Sigma, \neg \beta \vdash \neg \alpha$$

(*) (ب) از $\Sigma, \alpha \vdash \perp$ نتیجه بگیریم $\Sigma \vdash \neg \alpha$
(برهان خلف)

$$\frac{\boxed{\neg \alpha \vee \beta} \quad \alpha}{\underline{\beta}}$$

$$\frac{\neg \alpha \vee \beta, \alpha}{\beta}$$

(ج) فصل (Detachment)

$$\alpha \leftrightarrow \alpha' \quad \beta \leftrightarrow \beta'$$

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \alpha', \beta \leftrightarrow \beta'}{\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \alpha' \wedge \beta'}$$

(د)

$$\alpha \vee \beta \leftrightarrow \alpha' \vee \beta'$$

$$\alpha \rightarrow \alpha' \quad \beta \rightarrow \beta' \quad \alpha' \rightarrow \alpha \quad \beta' \rightarrow \beta \quad \alpha' \wedge \beta' \rightarrow \alpha \wedge \beta \quad \alpha \vee \beta \rightarrow \alpha' \vee \beta'$$

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \alpha', \beta \leftrightarrow \beta', \alpha * \beta}{\alpha' * \beta'}$$

$* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

$$\Sigma, \alpha \vdash \beta \stackrel{?}{\Rightarrow} \Sigma, \neg \beta \vdash \neg \alpha$$

اینست؟ (آیا)

$$\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \beta \stackrel{\text{فصل}}{\Rightarrow} \Sigma \vdash \neg \beta \rightarrow \neg \alpha \stackrel{\text{استدلال مپ}}{\Rightarrow} \Sigma, \neg \beta \vdash \neg \alpha \quad \checkmark$$

$$\Sigma, \alpha \vdash \perp \stackrel{?}{\Rightarrow} \Sigma \vdash \boxed{\neg \alpha}$$

مستحب

دست

$$\Sigma \vdash \alpha \rightarrow \perp$$

فصل و فصل

$$\Sigma \vdash \neg \perp \quad \Sigma \vdash \neg \perp \rightarrow \neg \alpha$$

↓ MP

$$\Sigma \vdash \neg \alpha$$

مذکر ① (تکلیف از نظر معنای)

$$\frac{\perp}{F} \leftarrow [\perp \Rightarrow \neg \alpha]$$

$$\neg \alpha \equiv \alpha \rightarrow \perp \quad \textcircled{2}$$

P	$P \rightarrow \perp$	$\neg P$
T	F	F
F	T	T

لما: به از هر دو فرض به β داریم:

(الف) $\vdash \neg \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

(ب) $\vdash \alpha \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \neg (\alpha \rightarrow \beta))$

(ج) $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$

اجه ۱: (به عنوان تمرین، سعی کنید بدون استفاده از قضیه استنتاج

ثبت (ج) را اجه ۲ کنید)

قرار دهید $\Sigma = \{\alpha \rightarrow \beta, \neg \alpha \rightarrow \beta\}$

(DT)

هدف ۱: $\Sigma \vdash \beta$

$\Sigma, \neg \beta \vdash \perp$ (برهان خلف)

$\left. \begin{array}{ll} 1. \neg \beta & \text{hyp.} \\ 2. \alpha \rightarrow \beta & \text{hyp.} \\ 3. \underline{\neg \alpha} & \text{فرض کنیم ۲} \end{array} \right\} \Rightarrow \Sigma, \neg \beta \vdash \underline{\neg \alpha} \quad \varphi \Rightarrow \Sigma, \neg \beta \vdash \perp$

$\left. \begin{array}{ll} 4. \neg \alpha \rightarrow \beta & \text{hyp.} \\ 5. \neg \beta \rightarrow \neg \neg \alpha & 4 \text{ و قانون یک نقض} \\ 6. \underline{\neg \neg \alpha} & 1, 5, \text{MP} \end{array} \right\} \Rightarrow \Sigma, \neg \beta \vdash \neg \neg \alpha \quad +1$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{با دو فرض} \quad \neg \alpha \text{ و } \neg \beta \\ \vdash \neg \neg \alpha \quad \Rightarrow \quad \vdash \neg \beta \end{array}}$

برهان خلف

$\Rightarrow$

$\boxed{\Sigma \vdash \beta}$

$\Rightarrow \{\alpha \rightarrow \beta, \neg \alpha \rightarrow \beta\} \vdash \beta \xrightarrow{\text{DT}} \{\alpha \rightarrow \beta\} \vdash (\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$

$\xrightarrow{\text{DT}} \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$



توضیح: دقت - جدولون

$\alpha, \neg \alpha \vdash \perp$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{(الف)} \\ \text{(ب)} \\ \text{(ج)} \end{array} \right\}$
 م.پ

$\vdash \left\{ \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \\ \text{V} \end{array} \right\}$

نیم: دستگاه استنتاجی متفاوت در جدولون به هم تفاوت

اجه ۲: دقیقاً با دستگاه استنتاج ما عاقل است.

به از هر $\alpha \in \text{FORM}$

$\vdash_M \alpha \Leftrightarrow \vdash \alpha$

تکمیل و صداقت

Completeness, Soundness

$$\mathcal{L} = P_1, P_2, \dots$$

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

$$(,)$$

FORM

معانی‌بخش
Semantics

Syntax

نمونه

$$\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

درستی منطقی

تولولوژی

$$\Sigma \models \alpha$$

⋮

لایه به می‌توان معانی‌بخش را
سازگار
مشتق
⋮

اثبات، اثبات‌ناپذیری

قضیه

تقریب مشتق، سازگار
به می‌تواند

$$\Sigma \vdash \alpha$$

{

}

⋮

}

$$(1) \models \alpha$$

Completeness

$$\Rightarrow$$

$$\vdash \alpha$$

تایید دستگاه
استنتاجی

$$\Leftarrow$$

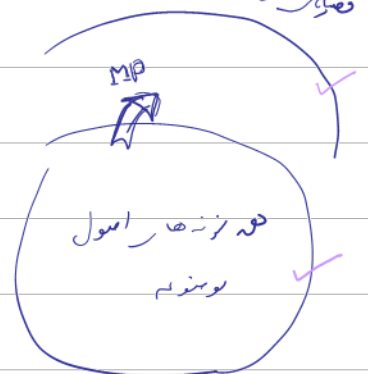
Soundness

قضیه صحت: هر قضیه‌ای از دستگاه استنتاجی منطقی گزاره‌ای، یک تولولوژی را دارد.

$$(\vdash \alpha \Rightarrow \models \alpha)$$

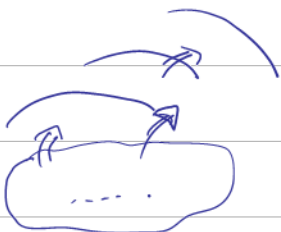
اثبات ۱.

قضیه منطقی گزاره‌ای



$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \models \alpha$$

هر α نمونه از اصل موضوع است.
و از قول دیگر قبل از استفاده.
از MP است امدادات.



فرموله از

قدم اول باید چک کنیم که اصول موضوعه یک تولولوژی است.

✓ قدم دوم اگر α و $\beta \rightarrow \alpha$ تولولوژی باشد آنگاه β نیز تولولوژی است. (MP تولولوژی بودن را حفظ می‌کند)

