

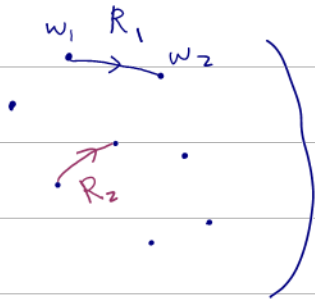
منطق های غیر کلاسیک
جلد ۱

$$F = \langle W, R \rangle$$

$$M = \langle F, V \rangle$$

$$V: \Phi \rightarrow \mathcal{P}(W)$$

$$p \mapsto V(p) \subseteq W$$



$$\varphi \quad \text{صدق} \quad F$$

تعریف مدل $M = \langle W, R, V \rangle$ ، ا در نظر بگیرید.

بر $w \in W$ مفهوم برآورد شدن یا صدق معرف فرمول φ
به شکل استقرائی زیر تعریف می شود:
(force)

$$\checkmark \textcircled{1} \quad M, w \Vdash p \quad \Leftrightarrow \quad w \in V(p)$$

$$\checkmark \textcircled{2} \quad M, w \not\Vdash \perp \quad \text{در هیچ } M, w \text{ درست نیست}$$

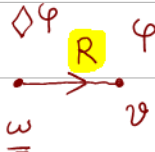
$$\checkmark \textcircled{3} \quad M, w \Vdash \neg \varphi \quad \Leftrightarrow \quad M, w \not\Vdash \varphi$$

$$\checkmark \textcircled{4} \quad M, w \Vdash \varphi \vee \psi \quad \Leftrightarrow \quad M, w \Vdash \varphi \quad \vee \quad M, w \Vdash \psi$$

$$\checkmark \textcircled{5} \quad M, w \Vdash \Diamond \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \exists v \in W \text{ به گونه ای موجود باشد که } R w v \text{ و } M, v \Vdash \varphi$$

درست

$\Diamond \varphi$: گمانه زایی که φ



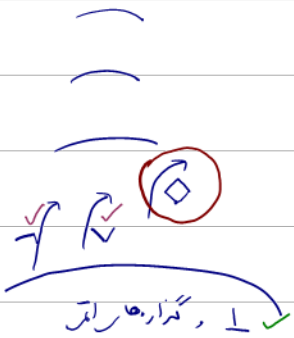
$\underline{F}, \underline{M}$

برآورد می شود.

φ در (M, w) درست است

φ is true in (M, w)

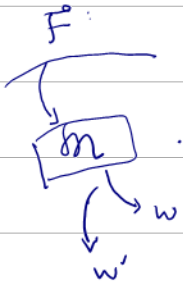
φ is satisfied in (M, w)



$\mathcal{F}, m$

تکلیف

منظور صدق با نسبت نگاه داشتن $\mathcal{F}$ درون مدل m و در جهان w تعریف شد است.



سؤال ۱. آیا فروت هست که در جهان موجود در m است؟

آیا فروت هست که در هر مدل سوار شده بر $\mathcal{F}$ است؟

$$m, w \Vdash \Box \varphi$$

تکلیف

$\Leftrightarrow$

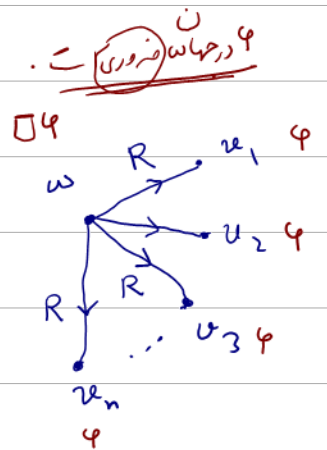
$$m, w \Vdash \neg \Diamond \neg \varphi$$

$\Leftrightarrow$

$$m, w \not\Vdash \Diamond \neg \varphi$$

$\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \text{همه } w \in W \text{ قابل دسترسی به } w \text{ (از طریق رابطه } R) \\ \text{موجود نیست که} \\ m, w \Vdash \neg \varphi \\ \Updownarrow \\ m, w \not\Vdash \varphi \end{array} \right]$$



$\Leftrightarrow$

به ازای هر $w \in W$ قابل دسترسی به w (از طریق R)

داشته باشیم

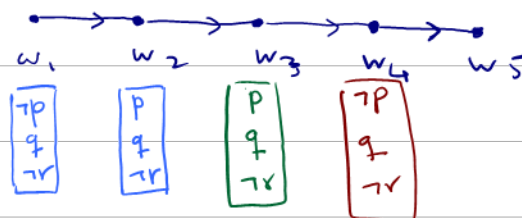
$$m, w \Vdash \varphi$$

$$\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$$

سؤال

$$W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$$

$$R w_i w_j \Leftrightarrow j = i + 1$$



$$m_2, w_2 \Vdash \Diamond \Diamond \Diamond \varphi$$

$$m_2: \langle \mathcal{F}, \mathcal{V}_2 \rangle$$

$\Phi = \{p, q, r\}$, $V(p) = \{w_2, w_3\}$ ✓ $\cup \{w_5\}$

p	$\neg p$
q	$\neg q$
r	$\neg r$

 $V(q) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$
 $V(r) = \emptyset$ $m, w_1 \Vdash r$

$m = \langle F, V \rangle$, $m, w_2 \Vdash p$ $m, w_4 \nVdash p$
 $m, w_3 \Vdash p$ $\Downarrow$
 $m, w_1 \Vdash \neg p$

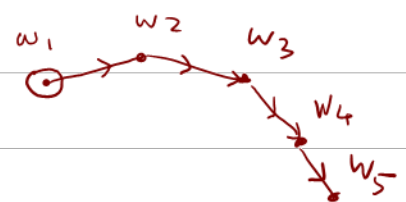
(1) $m, w_1 \Vdash \Diamond \Box p$ $\Leftrightarrow$ $m, w_1 \Vdash \Box p$
 $\swarrow \searrow$
 R_{w_1} $v \in W$

 $m, w_2 \Vdash \Box p$
در این
مابین

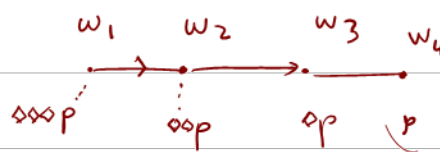
$\Leftarrow$ برای هر $v \in W$ که $R_{w_1} v$ داشته باشد
 $m, w_1 \Vdash p$
 $m, w_3 \Vdash p$
در این
مابین

(2) $m, w_1 \nVdash \Diamond \Box p \rightarrow p$

(3) $m, w_1 \Vdash q \wedge \Diamond (q \wedge \Diamond (q \wedge \Diamond (q \wedge \Diamond q)))$.
 $=$ $m, w_1 \Vdash q$
 $m, w_2 \Vdash$
 $m, w_2 \Vdash q$ $m, w_3 \Vdash$



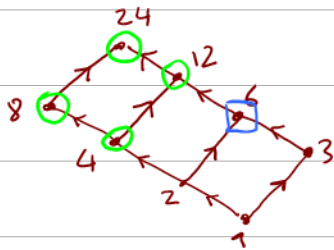
(4) $m, w_1 \nVdash \Diamond \Diamond \Diamond p$



در این مثال
 متکسر ✓ به ازای هر n مانند n که در F تعریف شود خواهیم داشت:

$m, w \Vdash \Diamond p \Leftrightarrow \Box p$

چرا که هر جهان طبق رابطه رسته‌ساز تعریف شد، در $\mathcal{F}(R^*)$ به حداکثر یک جهان دیگر رسته‌ساز دارد.



مثلاً:

$$W = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$Rxy \Leftrightarrow x \neq y \wedge x \mid y$$

$$2R12, (2,12) \in R$$

$$\Phi = \{p, q\}$$

$$\mathcal{V}(p) = \{4, 8, 12, 24\}$$

$$\mathcal{V}(q) = \{6\}$$

$$(1) \quad m_{1,4} \Vdash \Box p \quad ? \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_{1,8} \Vdash p & \Leftrightarrow p \in \mathcal{V}(p) \\ m_{1,12} \Vdash p & \Leftrightarrow 12 \in \mathcal{V}(p) \\ m_{1,24} \Vdash p & \Leftrightarrow 24 \in \mathcal{V}(p) \end{cases}$$

$$m_{1,6} \Vdash \Box p \quad \checkmark \Leftrightarrow \begin{cases} m_{1,12} \Vdash p \quad \checkmark \\ m_{1,24} \Vdash p \quad \checkmark \end{cases}$$

$$m_{1,2} \not\Vdash \Box p :$$

$$: \text{این دلیل که } m_{1,6} \not\Vdash p$$

$$(2) \quad m_{1,2} \Vdash \Diamond (q \wedge \Box p) \stackrel{?}{=} \Diamond (\neg q \wedge \Box p)$$

$$\Updownarrow \quad m_{1,2} \Vdash \Diamond (q \wedge \Box p) \quad , \quad m_{1,2} \Vdash \Diamond (\neg q \wedge \Box p) \quad \checkmark$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad m_{1,6} \Vdash q \wedge \Box p \quad \checkmark$$

مثلاً: بازار هر فصل در زبان سفلو محبت Φ و هر $n \in \mathbb{N}$ نماد $\Diamond^n \Phi$ را وضع می‌کنیم که معنی طبیعی زیر را دارد:

$$\Diamond^n \Phi \equiv \underbrace{\Diamond \Diamond \dots \Diamond}_{n \text{ بار}} \Phi$$

$$\text{تکرار } n=0 : \Diamond^0 \Phi \equiv \Phi$$

معنی آن‌ها این است که $\Diamond^n \Phi$ اضافه به استوار در n به همین فصل‌ها نیاز داریم این قرارداد را وضع می‌کنیم

$$\Box^n \Phi \equiv \underbrace{\Box \Box \dots \Box}_{n \text{ بار}} \Phi$$

$$\Box^2 \varphi \equiv \Box \Box \varphi \equiv \Box (\neg \Diamond \neg \varphi) \equiv \neg \Diamond \neg (\neg \Diamond \neg \varphi)$$

$$\Box^n \varphi \equiv \neg \Diamond^n \neg \varphi$$

$$\equiv \neg \underbrace{\Diamond \Diamond \neg \varphi}$$

فرض است که $n-1$ بار استوار در n بار استوار
همزمان شدن دارد

$$\Box^n \varphi \equiv \Box (\Box^{n-1} \varphi) \equiv \Box (\neg \Diamond \neg \varphi) \equiv \neg \Diamond \neg (\neg \Diamond^{n-1} \varphi)$$

$$\equiv \neg \Diamond \Diamond^{n-1} \varphi \equiv \neg \Diamond^n \neg \varphi$$

تعریف: در یک قاب $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ نیز می‌توان به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، رابطه روی R^n را تعریف کرد (سنتز با نمادگذاری بالا)

$$\begin{cases} R^0 xy := Rxy \\ R^{n+1} xy := \exists z (Rxz \wedge R^n zy) \end{cases}$$

تذکره: در یک مدل m تعریف شده روی قاب $\mathcal{F}$ خواص را می‌توان:

$$w \in W: m, w \Vdash \Diamond^n \varphi \Leftrightarrow \exists v \in W (R^n xw \wedge m, v \Vdash \varphi)$$



(۱) اگر $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$ قابی باشد، آنگاه به ازای هر m توفیق شده روی $\mathcal{F}$ (رابطه روی R متعلق به m)

و هر $w \in W$ خواص را می‌توان:

$$m, w \Vdash \Diamond^n \varphi \Leftrightarrow m, w \Vdash \Diamond \varphi \quad (\text{به ازای هر } n \geq 1)$$

$$m, w \Vdash \Diamond^2 \varphi \Leftrightarrow \exists v_1, v_2 \in W (R w v_1 \wedge R v_1 v_2 \wedge m, v_2 \Vdash \varphi)$$

$$\stackrel{\text{متعلق به } R}{\Leftrightarrow} \exists v_2 \in W (R w v_2 \wedge m, v_2 \Vdash \varphi)$$

$$\Leftrightarrow m, w \Vdash \Diamond \varphi$$



$$m, w \Vdash (\Diamond^n \varphi \leftrightarrow \Diamond \varphi) \quad (*)$$

مذکور. از آنجا که زبان منطق جهت‌یافته شامل گزاره پیوندها $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ است
 سایر گزاره پیوندها به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} \varphi \wedge \psi \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \end{cases}$$

به طبع، همان‌طور که صدق رابطه فرمول‌ها به شکل $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ نیز با استفاده از تعاریف فوق
 توسعه داده می‌شود. مثلاً: $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ با $\neg$ و $\vee$ و $\neg$ خواهد داشت:

$$(1) \quad m, w \models \varphi \wedge \psi \quad \overset{\text{تعریف صدق}}{\Leftrightarrow} \quad m, w \not\models \neg\varphi \vee \neg\psi$$

$$\overset{\text{تعریف صدق}}{\Leftrightarrow} \quad m, w \models \neg\varphi \vee \neg\psi \quad \Leftrightarrow \quad m, w \models \neg\varphi \quad \vee \quad m, w \models \neg\psi$$

$$\overset{''}{\Leftrightarrow} \quad m, w \not\models \varphi \quad \vee \quad m, w \not\models \psi$$

$$\overset{''}{\Leftrightarrow} \quad m, w \models \varphi \quad \vee \quad m, w \models \psi$$

$$(2) \quad m, w \models \varphi \rightarrow \psi \quad \Leftrightarrow \quad \dots \quad \Leftrightarrow \quad m, w \models \neg\varphi \vee \psi$$

$$(3) \quad m, w \models \varphi \leftrightarrow \psi \quad \Leftrightarrow \quad \dots \quad \Leftrightarrow \quad m, w \models \varphi \rightarrow \psi \quad \wedge \quad m, w \models \psi \rightarrow \varphi$$

(۲)

در ادامه تکرر فوق به طریقی به برقراران دید که در هر جایی که رابطه داریم آن معنی است، به ازای هر مدل تعریف شده در $\mathcal{F}$ و هر $w \in W$ داریم:

$$m, w \models \Box^n \varphi \Leftrightarrow \Box \varphi \quad (\text{به ازای هر } n \geq 1)$$

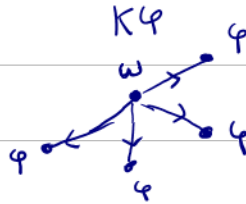
$$m, w \models \Box^n \varphi \Leftrightarrow \neg \Diamond^n \neg \varphi \quad \text{به دلیل گزاره فوق}$$

و از آنجا که:

$$m, w \models \neg \Diamond^n \neg \varphi \Leftrightarrow \neg \Diamond \neg \varphi$$

$$\begin{cases} \Box \varphi \Leftrightarrow \neg \Diamond \neg \varphi \\ \Diamond \varphi \Leftrightarrow \neg \Box \neg \varphi \end{cases} \quad \checkmark$$

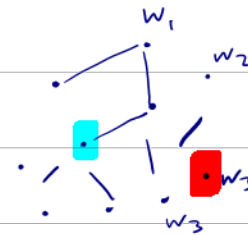
$M, w \models K\varphi \Leftrightarrow \varphi$ در همه ی موقعیت های w با شناختی در دسترس بعد
عالی مورد تقو می قرار باشد.
 $\square \varphi$



توئیق ۱: φ به شکل سترگسرای شود در دل M در w است اگر در هر نقطه از M φ درست است
($M \models \varphi$)
universal global

$M, w \models \varphi$

(φ is globally true in M)
universally



۲) فرض φ را در M برآورده می باشد هرگاه $w \in W$ به هر یافت شود.
(satisfiable in M)

$M, w \models \varphi$

۳) فرض φ را در M ردند و قابل ابطال می باشد هرگاه $w \in W$ به هر یافت شود.
(refutable in M)

$M, w \not\models \varphi$

($M, w \models \neg \varphi$)

M, w

۴) مجموعه از فرضیات Σ را به شکل سترگسرای در M درست می باشد هرگاه $\varphi \in \Sigma$ داشته باشد

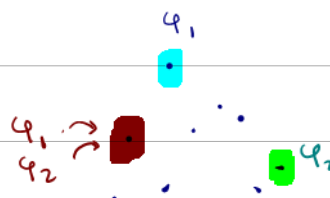
$M \models \varphi$

$\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots\}$

۵) مجموعه از فرضیات Σ را برآورده می باشد در M اگر $w \in W$ به هر یافت شود که به ازای هر $\varphi \in \Sigma$ داشته باشد

$M, w \models \varphi$

$\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$



(۱) نکته: گفتیم که برآورده شدن بودن Σ در M معنوی به راب قوی تر از این است که گفتیم فرمول ها در Σ در M برآورده شدنی باشد.

برای هر $\varphi \in \Sigma$ ، φ در M برآورده شدن $\Rightarrow \Sigma$ در M برآورده شدن

باید
 $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ همان
 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$
 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$
 معنوی به راب قوی تر است.

(۲) φ در M ابطال شدن نباشد $\Leftrightarrow M \models \neg \varphi$

$\Leftrightarrow \forall w \in W, M, w \models \neg \varphi$

معنی: در زبان منطق جهت یابی: $F = \langle W, R \rangle$ دنیای $w \neq \phi$
 قاب $M = \langle F, V \rangle = \langle W, R, V \rangle$ مدل
 تنها عملگر جهت: $\Diamond$

معنوم صدق (که به قاب، مدل و جهان گفته دارد)
 $M, w \models \varphi$
 M, F

معنوم به شکل بر نامه صادق بودن
 $M \models \varphi$

نماینده: معنوم فوق را در حالت کلی تعریف کنیم.
 ...
 (زبان منطق جهت در حالت کلی)
 متغیر بر همانند سازی ج