

منطق ریاضی

جلد ۱

$$\vdash \alpha \Rightarrow \vdash \alpha$$

قضیه است

(completeness)
قضیه است هر گزارشی که قضیه است.

همچنین به از هر فرمول α که اگر $p_1, \dots, p_n$ فرمول‌هایی ظاهرند در α باشند و $\alpha = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ به ازای هر فرمول‌هایی باشد

$$\left(\vdash \alpha \text{ با ویژگی مطلوب فاصله داریم} \right) \cdot \underbrace{p_1, \dots, p_n \vdash \alpha'}$$

اثبات ۱.

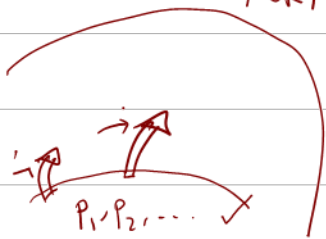
به از هر $i=1, \dots, n$ قرار می‌دهیم

$$p_i' \Rightarrow \begin{cases} p_i, & \alpha_i = T \\ \neg p_i, & \alpha_i = F \end{cases}$$

$$\alpha' \Rightarrow \begin{cases} \alpha, & f_{\alpha}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = T \\ \neg \alpha, & f_{\alpha}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = F \end{cases}$$

اثبات با استوار بودن **همچنین فرمول‌ها** بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم که α تنها شامل گزاره‌سیندها $\neg$ و $\rightarrow$ باشد.

FORM



حالت اول α یک فرمول اتمی
فرض کنیم

حالت دوم: α به شکل $\neg \beta$ که حکم درباره β برقرار باشد.

حالت سوم: α به شکل $\beta \rightarrow \gamma$ که فرض کنیم حکم درباره β و γ برقرار است.

$$(1) \quad \alpha \Rightarrow p_1 \quad \underline{(1-1) \quad u_1 = T} \Rightarrow p'_1 \Rightarrow p_1, \quad \alpha' \Rightarrow \alpha \Rightarrow p_1$$

اثبات $p'_1 \vdash \alpha'$

به معنی اثبات $p_1 \vdash p_1$

$\vdash \rightarrow \vdash$

داین برقرارات، چرا که

تبدیل می کردیم

محور $\rightarrow$ برقرارات.

$$\underline{(1-2) \quad u_1 = F} \Rightarrow p'_1 \Rightarrow \neg p_1, \quad \alpha' \Rightarrow \neg \alpha$$

$p'_1 \vdash \alpha'$

$\neg p_1 \vdash \neg p_1 \quad \checkmark$

$$(2) \quad \alpha \Rightarrow \neg \beta : \underline{(2-1) \quad f_\alpha(\bar{v}) = T} \Rightarrow \begin{cases} \alpha' \Rightarrow \alpha \\ f_\beta(\bar{v}) = F \Rightarrow \beta' \Rightarrow \neg \beta \end{cases}$$

(توجه کنید فرمول اتمی ظاهر شده در α و β دقیقاً یکسان هستند)

و طبق فرض استقلا، داریم $p'_1, \dots, p'_n \vdash \beta'$

$$\Rightarrow p'_1, \dots, p'_n \vdash \underbrace{\neg \beta}_{\alpha'} \quad \checkmark$$

$$\underline{(2-2) \quad f_\alpha(\bar{v}) = F} \Rightarrow \begin{cases} \alpha' \Rightarrow \neg \alpha \\ f_\beta(\bar{v}) = T \Rightarrow \beta' \Rightarrow \beta \end{cases}$$

فرض استقلا $p'_1, \dots, p'_n \vdash \beta'$

$$\Rightarrow p'_1, \dots, p'_n \vdash \beta$$

$$\vdash \beta \rightarrow \neg \neg \beta \quad (\text{از اصل II})$$

$$\Rightarrow p'_1, \dots, p'_n \vdash \neg \neg \beta \quad \text{قاعده مقیاس زنجیری}$$

$$\left(\begin{array}{c} \neg \alpha \\ \neg \alpha' \end{array} \right)$$

$$(3) \quad \alpha \models \beta \rightarrow \gamma \quad \underbrace{(3-1) \quad f_\beta(\bar{v}) = F \Rightarrow}_{\text{فرض استوار}} \left\{ \begin{array}{l} f_\alpha(\bar{v}) = T \Rightarrow \alpha' \models \alpha \\ \beta' \models \neg \beta \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{فرض استوار} \quad p'_1, \dots, p'_n \vdash \beta' \\ \downarrow \\ p'_1, \dots, p'_n \vdash \neg \beta \quad (*) \end{array}$$

[تکثیر: مکملیات قبول‌ها اینها باشند که در α ظاهر شوند آن در β نباشند]

$$p_1, \dots, p_n : \alpha$$

$$p_{i_1}, \dots, p_{i_k} : \beta$$

فرض استوار

$$p'_1, \dots, p'_{i_k} \vdash \beta'$$

$\downarrow$

$$\left[p'_1, \dots, p'_n \vdash \beta' \right]$$

$$\vdash \neg \beta \rightarrow (\neg \beta \rightarrow \gamma)$$

لمطابق قبل

+

(*)

+

قاعده مقیاس زنجیری

$\downarrow$

$$p'_1, \dots, p'_n \vdash \underbrace{\beta \rightarrow \gamma}_{\alpha'}$$

$$\neg \beta \wedge \neg \beta \rightarrow \gamma$$

$$\underbrace{(3-2) \quad f_{\gamma}(\bar{v}) = T :}_{\text{فرض استوار}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma' \models \gamma \\ f_\alpha(\bar{v}) = T \Rightarrow \alpha' \models \alpha \end{array} \right.$$

$$\left[\dots \right] \quad \text{فرض استوار} \quad p'_1, \dots, p'_n \vdash \delta'$$

$$\Rightarrow p_1', \dots, p_n' \vdash \delta$$

$$\vdash \delta \rightarrow (\beta \rightarrow \delta) \quad (I1) \text{ (اصل I1)}$$

$$\begin{array}{c} \text{قیاک زنجیر} \\ \Rightarrow \\ p_1', \dots, p_n' \vdash \underbrace{\beta \rightarrow \delta}_{\alpha'} \end{array}$$

$$\frac{(۲۳) \quad f_p(\bar{v})=T, f_r(\bar{v})=F}{:} \Rightarrow \begin{cases} f_{\alpha'}(\bar{v})=F \Rightarrow \alpha' \models \neg \alpha \\ \beta' \models \beta \\ \gamma' \models \neg \gamma \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} [\dots : \text{تذکره} : \dots] & p_1', \dots, p_n' \vdash \beta' & p_1', \dots, p_n' \vdash \beta \quad (*_1) \\ & \Rightarrow & \\ & p_1', \dots, p_n' \vdash \delta' & p_1', \dots, p_n' \vdash \neg \delta' \quad (*_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} p_1', \dots, p_n' \vdash \neg \alpha \\ \neg(\beta \rightarrow \delta) \end{array} \quad \text{هدف}$$

$$\vdash \beta \rightarrow (\neg \delta \rightarrow \neg(\beta \rightarrow \delta)) \quad \text{لمر صبه قبل}$$

با دو بار استفاده از قیاک زنجیر و $(*_1)$ و $(*_2)$ خواهیم داشت:

$$\begin{array}{c} p_1', \dots, p_n' \vdash \underbrace{\neg(\beta \rightarrow \delta)}_{\neg \alpha} \\ \hline \alpha' \end{array}$$



$$\text{اثبات قضیه تمایز:} \quad \models \alpha \Rightarrow \vdash \alpha \quad \text{زهدت}$$

فرض کنید $p_1, \dots, p_n$ فرمول‌های اتمی ظاهرش در α هستند.

$$\begin{array}{ccc} \text{اگر } \bar{v} = \langle T, T, \dots, T, T \rangle & \text{و } \bar{w} = \langle T, T, \dots, T, F \rangle & \text{دارای دو حالت} \\ \downarrow & \downarrow & \\ p_1' \vdash p_2' \vdash \dots \vdash p_{n-1}' \vdash p_n' & & p_1' \vdash p_2' \vdash \dots \vdash p_{n-1}' \vdash p_n' \end{array}$$

طبق به قبل، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} p'_1, \dots, p'_{n-1}, p'_n \vdash \alpha' \\ p''_1, \dots, p''_{n-1}, p''_n \vdash \alpha'' \end{cases}$$

اما، α یک **توتال** است. بنابراین به ازای هر ارزش در هر ارزش دست را اختیار می‌کند.
بنابراین $\alpha \supseteq \alpha'$ و $\alpha \supseteq \alpha''$ پس:

$$\begin{cases} p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n \vdash \alpha \\ p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, \neg p_n \vdash \alpha \end{cases}$$

$$\Sigma = \{p_1, \dots, p_{n-1}\} \quad , \quad \begin{cases} \Sigma, p_n \vdash \alpha \\ \Sigma, \neg p_n \vdash \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma \vdash p_n \rightarrow \alpha \\ \Sigma \vdash \neg p_n \rightarrow \alpha \end{cases}$$

$$\vdash (p_n \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\neg p_n \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \quad \text{قاعده از لم صبه قبل}$$

با دو بار استفاده از قاعده قیاس زیر بنویسیم:

$$\Sigma \vdash \alpha$$

$$p_1, \dots, p_{n-1} \vdash \alpha$$

(کمی با اعمال)

:

با $(n-1)$ بار تکرار همین استدلال

می‌توانیم همه مفروضات دیگر را نیز حذف کرده و اثبات کنیم.

$$\boxed{\vdash \alpha}$$



تمرین: اثبات مطرح شده به روشیه تایت

را به روشیه که α مثال سه گزاره ایتر p_1, p_2, p_3 است

به طور کامل بنویسید.

حل تمرین شنبه ۱۴۰۵/۳/۱

تمرین (۵-۵) $p \vee q$ را براساس $\rightarrow$ بنویسیم :

$$p \vee q \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

$$\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha \rightarrow p \quad p \rightarrow \beta$$

p	q	$p \vee q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow q$	$\equiv$	$(q \rightarrow p) \rightarrow p$	p	q	$q \rightarrow p$	α
T	T	T	T	$\equiv$	T	T	T	T	T
T	F	T	F	$\equiv$	F	T	F	F	F
F	T	T	T	$\equiv$	T	F	T	T	T
F	F	F	T	$\equiv$	T	F	F	F	F

تمرین (۵-۳) $\{ \rightarrow, \vee \}$ بسته نبست.

را با اصل اولی. یعنی تمرین قبل $\vee$ بر حسب $\rightarrow$ نوشته می شود.

پس نتیجه بدین $\{ \rightarrow, \vee \}$ معادل بسته بودن $\{ \rightarrow \}$ است.

اما پس گزاره که شاید بگویم آنها گزاره یهونه هار دوتایی

که به آنها یه نتیجه هستند $\downarrow$ و $\uparrow$ است.

(*) **تمرین** نشان دهید که $\leftrightarrow$ را به زبان با استفاده از $\rightarrow$ نوشت.

$$\alpha \equiv \{ \alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \dots \} \quad p \leftrightarrow q \neq p \rightarrow q$$

را $F_{\rightarrow}$ محبوبه فریدها باشد که تنها عمل گزاره یهونه هار $\rightarrow$ است در نظر بگیریم.

ایمان. نشان دهید که هر $\alpha \in F_{\rightarrow}$ دالار ویژگی زیارت:

همچون ارزش دهر مانند $\langle T, \dots, T \rangle$ قه که به فریل هار است

ظا حیدر در α ارزش T به حد.

$$f_{\alpha}(\bar{v}) = T.$$

اجے سے پہلے . بااستعداد و سیکھنے کی فرسٹ

(براین لائنہ F_v جو ہر استوائیات)

$$\alpha \in F_v \rightarrow$$

$$\alpha \equiv p \wedge p$$

$$T \quad (F)$$

$$p$$

$$T$$

✓ صحت ہے $\alpha \Rightarrow p$ واضح ہے .

✓ صحت ہے $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ کہ فرض کر لیں کہ β و γ صحیح ہیں .

$$p_1 \dots p_n$$

$$T \dots T$$

$$\beta \quad \gamma$$

$$T \quad T$$

$$\beta \vee \gamma \quad \beta \rightarrow \gamma$$

$$T \quad T$$

✓ صحت ہے $\alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \gamma$

اربعہ .

تمرین (4-4) .

$$\alpha \equiv (p \vee q) \rightarrow \neg \neg p$$

$$p \vee q$$

* کتب گزاردہ ہیں نہ بعضیات

مہربانی کے ساتھ

f_{α} کو تابع لائنوں سے بعضیات

$$\neg p \equiv p * p$$

$$(p \vee p) \rightarrow \neg \neg p$$

$$F \quad T$$

$$T \quad F$$

$$p \equiv p \vee p$$

$$q \equiv \neg \neg q$$

$$p \vee q \rightarrow \neg \neg q \equiv p \rightarrow q$$

$$p \rightarrow q \equiv p * q \equiv p * q$$

$$*(p, q, \neg q) = *(p, q, *(q, q, q)) \quad \checkmark$$

تمرین (4-1) f_7 ، بااستعدادان f_7 ، f_8 نویسی .

p	q	f_8	f_7
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	T

$$p \leftrightarrow q \quad \neg, \wedge$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$\equiv \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$$

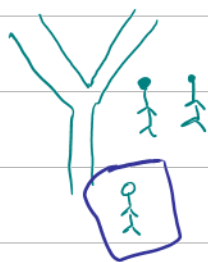
$f_8 \quad f_8 \quad f_8$

$$v_1, v_2 \in \{T, F\}: \quad f_7(v_1, v_2) = f_8(f_7(f_8(v_1, f_7(v_2))), f_7(f_8(v_2, f_7(v_1))))$$

✓

مکس
۱.۴۶

{
خوار، رات هاگوبند
خوار، دروغ می گویند



{
 p : راه سمت راست به عقده مار
 q : فرزند ازاد سؤال پرسید، آیا تو راستگوست

$$\alpha \equiv p \leftrightarrow q$$

	p	q	α	جواب
خود راستگوست	T	T	T	بله
خود دروغگوست	T	F	F	بله
فرزند راستگوست	F	T	F	خیر
فرزند دروغگوست	F	F	T	خیر

سؤال: تو رات هاگویی اگر فقط اگر راه سمت راست به عقده مار.
رات گفتیم تو معادل این است که راه سمت راست به عقده مار.