

منطق ریاض

جلد ۹

(term)

تعریف: مجموعه ترم‌ها یا عبارات زبان منطق مرتبه اول را با نام TERM

معمولاً استقرائاً به شکل زیر تعریف می‌شود:

$L_{F.O.} : x_1, x_2, \dots$
 $c_1, c_2, \dots$

$f_1^n, f_2^n, \dots$

$p_1^n, p_2^n, \dots$

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

$(,)$

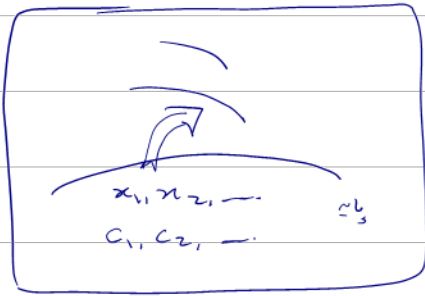
(1) $x_1, x_2, \dots \in TERM$

(2) $c_1, c_2, \dots \in TERM$

(3) اگر $t_1, \dots, t_n \in TERM$ و f_i^n یک n تایی باشد

آنگاه $f_i^n(t_1, \dots, t_n) \in TERM$

TERM



$\left\{ \begin{array}{l} x_1, c_1, f_1^1(m_1), f_1^2(c_1, f_1^1(m_1)), \dots \\ f_1^1(f_1^1(m_1)), \\ f_1^1(f_1^1(f_1^1(m_1)), \dots \end{array} \right.$

~~$f_1^1(x_1), f_1^2(x_1)$~~

تعریف: مجموعه فرمول‌ها یا خوش ساخت منطقی مرتبه اول را با نام FORM

نمایش می‌دهیم که به شکل استقرائاً زیر تعریف می‌شود:

(1) اگر $t_1, \dots, t_n \in TERM$ و p_i^n یک n تایی منطقی باشد

آنگاه $p_i^n(t_1, \dots, t_n) \in FORM$ (فرمول‌ها را بنویس)

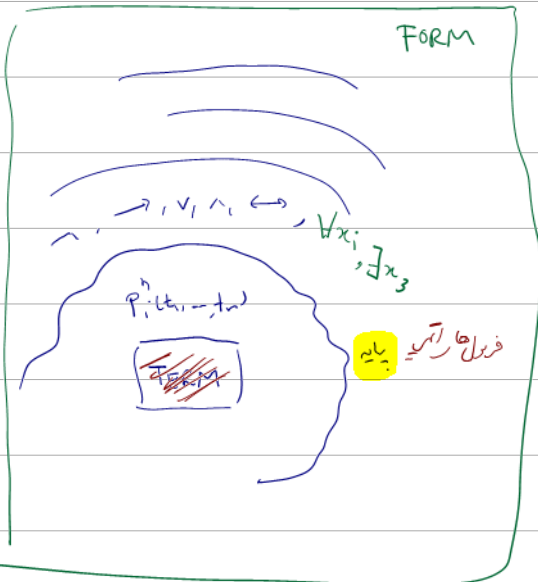
(2) اگر $\varphi \in FORM \Rightarrow (\neg \varphi) \in FORM$

(3) $\varphi, \psi \in FORM \Rightarrow (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \vee \psi) \in FORM$
 $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$

(4) $\varphi \in FORM$

$\Rightarrow (\forall x_i, \varphi), (\exists x_i, \varphi) \in FORM$
 $L_{F.O.}$ متغیر آزاد

FORM



توان

$$x^2 + 2xy + 3y^2 = 0$$

معادله

$$x^2 + y^2 \geq 4$$



مجموعه اعداد حقیقی IR

0, 1, sqrt(2), sqrt(5), pi, e, ...

sin x, x+y, sqrt(2)tg x, e^n, cosh(x^2+1), ...

فرض

مسئله آیا $P_1^2(c_1, c_2)$ درست است؟ نمی دانیم

✓

$$\begin{cases} c_1: \sqrt{2} \\ c_2: \sqrt{5} \\ \underline{P_1^2(x, y)}: \end{cases}$$

در اعداد حقیقی: IR

n کمترین است.

x

$$\begin{cases} c_1: 3 \\ c_2: 11 \\ P_1^2(x, y): \end{cases}$$

در اعداد صحیح:

n, y را هم دارد.

$$\begin{cases} c_1: \text{علی} \\ c_2: \text{حسن} \\ P_1^2(x, y): \end{cases}$$

در جهان انسان:

n برابر y است.

تعریف یک تعبیر یا ساختار در منطق رسته اول مثال اجزای زیرات:

(1) $M \neq \emptyset$ دامنه سخن، جهان سخن universe domain (structure) (interpretation)

$$C = \{c_1, c_2, \dots\}$$

(2) $\frac{M}{C} \in M$, $c \in P_{f.o}$ به ازای هر نماد و ثابت $\frac{M}{C}$ عنصر از M را اختصاص می دهیم

$$F = \{f_1^n, f_2^n, \dots\}$$

(3) به ازای هر نماد تابعی n-نومنی f_i^n در $M^n \rightarrow M$ در M تعریف می کنیم

$$P = \{p_1^n, p_2^n, \dots\}$$

(4) به ازای هر نماد محموله n-نومنی p_i^n یک رابطه n-نومنی

$$(P_i^n)^M \subseteq M^n$$

در M تعریف می کنیم.

$$\rightarrow M = \langle M, \{ (p_i^n)^M \}_{p_i^n \in P}, \{ (f_i^n)^M \}_{f_i^n \in F}, \{ c_i^n \}_{c_i \in C} \rangle$$

این تغییر را با درجه‌بندی مرتبه ۱

به شکل دیگری تعریف می‌کنیم:

$$I: CUFUP \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M^n$$

تعریف تابعی

$$c \mapsto c^M \in M, \quad I(c) = c^M$$

$$f_i^n \mapsto (f_i^n)^M: M^n \rightarrow M, \quad I(f_i^n) = (f_i^n)^M$$

$$p_i^n \mapsto (p_i^n)^M \in M^n, \quad I(p_i^n) = (p_i^n)^M$$

مثلاً در مرتبه پدیده‌ها، اشیاء یا مفاهیم مختلف لزوماً به همه اشیاء منطبق درجه اول نیاز ندارند.

باز هم تعریف مجدد:

$$M = \langle \mathbb{N}, \leq, +, \cdot, 0, 1 \rangle \quad \text{مثال ۱}$$

$$L = \{ c_1, c_2, f_1^2, f_2^2, p_1^2 \}$$

$$\begin{array}{c} f, g \\ \{ c_1, c_2, f_1, f_2, p \} \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \text{در مرتبه ۱} \quad \text{در مرتبه ۱} \quad \text{در مرتبه ۱} \end{array}$$

$$(c_1)^M = 0, \quad \underline{\mathbb{N} \neq \emptyset}$$

$$(c_2)^M = 1$$

$$\{ (f_1^2)^M: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) \mapsto x \cdot y \}$$

$$\{ (f_2^2)^M: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) \mapsto x + y \}$$

$$(p_1^2)^M = \{ (x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y \}$$

تعریف ۱) یک مجموعه مرتبه اول از اشیاء منطبق درجه اول را یک زبان می‌نامیم و معمولاً آن را با L نمایش می‌دهیم.

$$\underline{L} \subseteq L_{F.O.}$$

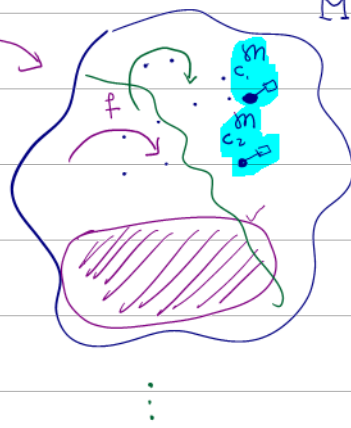
۲) تغییر یک خانه مرتبه تنها عناصر L را تغییر کرده است

یک L - خانه مرتبه مناسبت
 L - سافت

$$L = \{c_1, c_2, f_1^2, f_2^2, f_1', f_2', p_1', p_2'\}$$

$$L = \{+, \cdot, \sin, e^x, \sinh, -\}$$

معنی نموس به خوری گفته



$$M \neq \emptyset$$

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$$

$$\frac{|M|}{2}$$

$$\alpha_0 < 2^{\alpha_0} < 2^{(2^{\alpha_0})}$$

$$p \mapsto \text{رابه} \subseteq M^n$$

$$p_1^2(c_1, c_2)$$

$$? p_1^2(x_1, m_2)$$

$$M = \langle M, (p_i^2)^M, c_1^M, c_2^M \rangle$$

$$\underline{\underline{p_1^2(x_1, m_2)}}$$

$$\varphi_1 \quad p_1'(c_1)$$

$$\varphi_2 \quad p_1^2(x_1, m_2)$$

$$\varphi_3 \quad \exists x_1 p_1'(m_1)$$

$$\varphi_4 \quad \forall x_1 (p_1^2(x_1, c_1) \rightarrow p_1'(m_2))$$

$$\varphi_5 \quad \forall x_1 \exists x_2 (p_1'(m_1) \wedge \neg p_1'(m_2) \rightarrow p_1^2(f_1'(x_1), c_1))$$

:

$$\varphi_6 \quad \left(\exists x_1 p_1'(m_1) \wedge \left(\forall x_2 p_1^2(x_2, m_2) \right) \right) \quad \begin{cases} FV(\varphi) = \{x_1\} \\ BV(\varphi) = \{x_1, m_2\} \end{cases}$$

$$\exists x_1 (p_1'(m_1) \wedge \neg p_1'(m_2))$$

تولید ① وقوع متغیر در فرمول φ را حضور

free occurrence

وقوعی آزاد در نام حتما در دامنه هیچ
بود در دامنه قرار نگرفت

② در غیرین صورت، آنرا وقوع بسته
یا وابسته می‌نامیم

bound occurrence

to bind

کران bound:
کرانه‌بندی to bound:

$BV(\varphi) :=$ همی متغیرهایی که در φ
حضور بسته دارند

$FV(\varphi) :=$ همی متغیرهایی که در φ حضور
آزاد دارند

③

$$FV(\varphi_j) = \emptyset \quad , \quad BV(\varphi) = \{x_1, x_2\}$$